# Modellistica Numerica

Università di Pavia

23 Gennaio 2018 — Ore 10:00 — Aula C8

Ogni esercizio ha lo stesso valore. Durata dell'esame: 2 ore.

## Problema 1. Errore di troncamento delle differenze finite

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione liscia e siano $x_0, h \in \mathbb{R}$ con $h > 0$. Vogliamo approssimare la derivata prima $f'(x_0)$ con delle differenze finite.

1. Mostrare che l'errore commesso dalle differenze finite centrate $D_h^C f(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ ha ordine di convergenza quadratico in $h$.
2. Ora supponiamo di avere a disposizione solo i valori di $f(x_0)$, $f(x_0+h)$ e $f(x_0+2h)$.
   Determinare dei valori per $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che la differenza finita nella forma
   $$D_h^{\#} f(x_0) = \frac{af(x_0) + bf(x_0+h) + cf(x_0+2h)}{h}$$
   approssimi $f'(x_0)$ con ordine quadratico in $h$. Mostrare che l'errore è effettivamente quadratico.

Suggerimento: usare l'espansione di Taylor di $f$ centrata in $x_0$.

---

Soluzione: (1.) [Fatto in classe.] Espandendo con Taylor intorno a $x_0$:

$$f(x_0 \pm h) = f(x_0) \pm hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) \pm \frac{h^3}{6}f'''(\xi_\pm) \qquad \text{per } \xi_+ \in (x_0, x_0+h), \xi_- \in (x_0-h, x_0), \quad \text{quindi}$$

$$f'(x_0) - D_h^C f(x_0) = f'(x_0) - \frac{2hf'(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_+) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_-)}{2h} = \frac{h^2}{6}f'''(\xi) \qquad \xi \in (x_0-h, x_0+h).$$

(2.) Espandendo ancora con Taylor intorno a $x_0$:

$$\begin{aligned} D_h^{\#} f(x_0) &= \frac{af(x_0) + bf(x_0+h) + cf(x_0+2h)}{h} \\ &= \frac{af(x_0) + b\Big(f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_0) + \mathcal{O}(h^3)\Big) + c\Big(f(x_0) + 2hf'(x_0) + \frac{1}{2}4h^2 f''(x_0) + \mathcal{O}(h^3)\Big)}{h} \\ &= \frac{a+b+c}{h}f(x_0) + (b+2c)f'(x_0) + \Big(\frac{b}{2} + 2c\Big)hf''(x_0) + (b+c)\mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Se $a+b+c = 0$, $b+2c = 1$ e $b/2 + 2c = 0$ abbiamo $D_h^{\#} f(x_0) - f'(x_0) = (b+c)\mathcal{O}(h^2)$. Questo sistema lineare ha soluzione $a = -3/2, b = 2, c = -1/2$ quindi l'unica soluzione possibile è

$$D_h^{\#} f(x_0) = \frac{-\frac{3}{2}f(x_0) + 2f(x_0+h) - \frac{1}{2}f(x_0+2h)}{h} = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{2h}.$$

---

## Problema 2. Il codice misterioso

Sia fissata una variabile Matlab `n` $\in \mathbb{N}$.

1. Descrivere cosa fa il seguente comando Matlab:

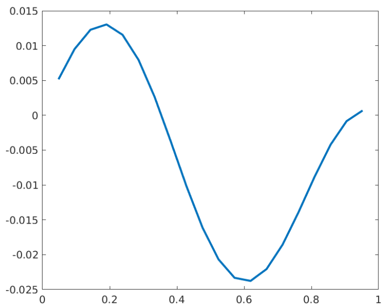
```
plot((1:n)/(n+1), spdiags(ones(n,1)*[-(n+1)^2, 1+2*(n+1)^2,-(n+1)^2], [-1,0,1],n,n)...
      \ exp(2*(1:n)'/(n+1)) );
```

   Quale problema al bordo viene risolto?

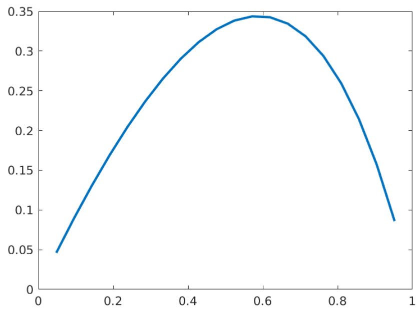
2 Sia fissato `n=20`. Quale dei seguenti grafici è generato dal comando mostrato sopra?

   Giustificare la risposta.

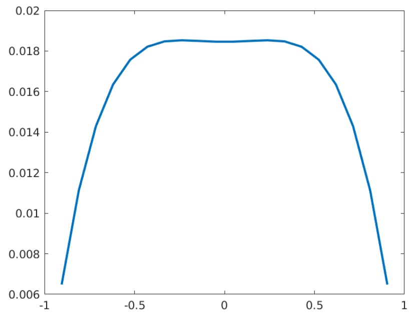
   Suggerimento: osservare gli assi cartesiani.




$\boxed{1}$




$\boxed{2}$




$\boxed{3}$

---

Soluzione:

1. Questo comando
   (i) assembla matrice e termine noto del metodo delle differenze finite per il problema $-u'' + u = \mathrm{e}^{2x}$, $u(0) = u(1) = 0$ con $n$ nodi,
   (ii) risolve il corrispondente sistema lineare tridiagonale $n \times n$,
   (iii) plotta la soluzione discreta.
   Notare che $(n+1)^2 = 1/h^2$ e che `(1:n)` genera un vettore riga.
2. Il grafico corretto è il numero 2.

   Il primo mostra una funzione non positiva, mentre la soluzione del problema al bordo e la sua approssimazione discreta sono positive per il principio del massimo.

   Il terzo grafico mostra una funzione sull'intervallo $(-1, 1)$, mentre `plot((1:n)/(n+1),...)` plotta sull'intervallo $(0, 1)$.

---

## Problema 3. Il principio di Ritz astratto

Sia $V$ uno spazio di Hilbert, $\mathcal{F}(\cdot)$ un funzionale lineare continuo su $V$, e $\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ una forma bilineare continua e coerciva in $V$. Assumiamo inoltre che $\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ sia simmetrica, cioè $\mathcal{A}(u,w)=\mathcal{A}(w,u)$ per ogni $u,w\in V$. Definiamo il funzionale quadratico $J(w):=\frac{1}{2}\mathcal{A}(w,w)-\mathcal{F}(w)$ per $w\in V$.

Dimostrare che il problema variazionale astratto

$$\text{trovare } u\in V \text{ tale che } \mathcal{A}(u,w)=\mathcal{F}(w) \qquad \forall w\in V \tag{1}$$

è equivalente al problema di minimo

$$\text{trovare } u\in V \text{ tale che } J(u)=\min_{w\in V} J(w). \tag{2}$$

("Equivalente" significa che ogni $u$ soluzione di (1) è anche soluzione di (2), e viceversa.)

Suggerimento: ricordare la dimostrazione del principio di Ritz per un problema al bordo.

---

Soluzione: (I) Assumiamo che $u$ sia soluzione di (2) e mostriamo che è anche soluzione di (1). Fissiamo $w\in V$ e $\epsilon\in\mathbb{R}$ arbitrari. Allora $\Psi(\epsilon):=J(u+\epsilon w)\geq J(u)$. Espandiamo la funzione (reale di variabile reale) $\Psi$ e la sua derivata:

$$\begin{aligned}
\Psi(\epsilon) &= \frac{1}{2}\mathcal{A}(u+\epsilon w,u+\epsilon w)-\mathcal{F}(u+\epsilon w)\\
&= \frac{1}{2}\mathcal{A}(u,u)+\frac{1}{2}\epsilon\mathcal{A}(w,u)+\frac{1}{2}\epsilon\mathcal{A}(u,w)+\frac{1}{2}\epsilon^2\mathcal{A}(w,w)-\mathcal{F}(u)-\epsilon\mathcal{F}(w)\\
&= J(u)+\epsilon\mathcal{A}(u,w)-\epsilon\mathcal{F}(w)+\frac{1}{2}\epsilon^2\mathcal{A}(w,w),\\
\frac{\partial\Psi}{\partial\epsilon}(\epsilon) &= \mathcal{A}(u,w)-\mathcal{F}(w)+\epsilon\mathcal{A}(w,w).
\end{aligned}$$

La funzione $\Psi$ ha un minimo in zero, quindi $0=\Psi'(0)=\mathcal{A}(u,w)-\mathcal{F}(w)$, che significa che $u$ è soluzione di (1).

(II) Assumiamo ora che $u$ sia soluzione di (1) e calcoliamo $J(u+w)$ per una $w\in V$ arbitraria come sopra:

$$J(u+w)=\frac{1}{2}\mathcal{A}(u+w,u+w)-\mathcal{F}(u+w)=J(u)+\underbrace{\mathcal{A}(u,w)-\mathcal{F}(w)}_{=0}+\underbrace{\frac{1}{2}\mathcal{A}(w,w)}_{\geq 0}\geq J(u),$$

quindi $u$ è punto di minimo per $J$.

---

## Problema 4. Equazione di Helmholtz

Consideriamo il problema al bordo

$$-u''(x) - Q\,u(x) = f(x) \quad \text{in } (a,b), \qquad u(a) = u(b) = 0,$$

dove $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $f \in C^0([a,b])$ e $Q$ è un numero positivo (notare il segno meno davanti a $Q$).

1. Mostrare che se $u \in C^2(a,b)$ è soluzione classica del problema al bordo, allora è anche soluzione debole del seguente problema variazionale:

$$\text{trovare } u \in H_0^1(a,b) \text{ tale che} \qquad \int_a^b (u'w' - Quw)\,\mathrm{d}x = \int_a^b fw\,\mathrm{d}x \qquad \forall w \in H_0^1(a,b).$$

2. Scrivere questo problema debole in forma variazionale astratta.
3. Assumiamo che $0 < Q < 1/C_P^2$, dove $C_P$ è la costante di Poincaré cioè $\|w\|_{L^2(a,b)} \le C_P\,|w|_{H^1(a,b)}$ $\forall w \in H_0^1(a,b)$.

   Dimostrare che questo problema soddisfa le ipotesi del Teorema di Lax–Milgram.
4. Fissare per semplicità $(a,b) = (0,1)$. Mostrare che esistono valori positivi di $Q$ per cui il problema debole *non* è ben posto.

   Suggerimento: mostrare che non vale l'unicità della soluzione per un problema specifico.

---

Soluzione: (1.) Usando l'integrazione per parti, l'equazione differenziale e le condizioni al bordo, $\forall w \in H_0^1(a,b)$

$$\int_a^b fw\,\mathrm{d}x = \int_a^b (-u'' - Qu)w\,\mathrm{d}x = \int_a^b (u'w' - Quw)\,\mathrm{d}x - u'(b)w(b) + u'(a)w(a) = \int_a^b (u'w' - Quw)\,\mathrm{d}x.$$

(2.) Il problema variazionale astratto è: trovare $\underline{u \in V \text{ tale che } \mathcal{A}(u,w) = \mathcal{F}(w)\ \forall w \in V}$, dove

$$\mathcal{A}(u,w) := \int_a^b (u'w' - Quw)\,\mathrm{d}x, \qquad \mathcal{F}(w) := \int_a^b fw\,\mathrm{d}x, \qquad V := H^1(a,b).$$

(3.) Usiamo la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz e la definizione di norme e seminorme:

$$|\mathcal{F}(w)| \le \|f\|_{L^2(a,b)}\,\|w\|_{H^1(a,b)}\,,$$

$$|\mathcal{A}(u,w)| \le \max\{1,Q\}\,\|u\|_{H^1(a,b)}\,\|w\|_{H^1(a,b)}\,,$$

$$\mathcal{A}(w,w) = \int_a^b \left((w')^2 - Qw^2\right)\mathrm{d}x = |w|^2_{H^1(a,b)} - Q\,\|w\|_{L^2(a,b)} \ge \underbrace{(1 - QC_P^2)}_{>0}\,|w|^2_{H^1(a,b)} \ge \frac{1 - QC_P^2}{1 + C_P^2}\,\|w\|^2_{H^1(a,b)}\,.$$

$$C_{\mathcal{F}} = \|f\|_{L^2(a,b)}\,, \quad C_{\mathcal{A}} = \max\{1,Q\}, \quad \gamma_{\mathcal{A}} = \frac{1 - QC_P^2}{1 + C_P^2}.$$

(4.) Se $Q = n^2\pi^2$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ allora ogni multiplo scalare di $u_n(x) := \sin(n\pi x)$ è soluzione del problema omogeneo, quindi il problema non è ben posto.

---