DOMANDE D'ESAME (tempo a disposizione per due domande: 1 ora)

A.A. 2020–2021

1. Equazione del trasporto omogenea su $\mathbb{R}$: dimostrare esistenza, unicità e stabilità.
   Si consideri poi il problema
   $$u_t + 3u_x = 0, \quad u(x,0) = \cos(2\pi x).$$
   Si ha $u(x,t) =$ e $u(2,3) =$
2. Studio di $u_t + cu_x = f(t), \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \ c$ costante: dimostrare esistenza, unicità e stabilità.
   Si consideri poi il problema
   $$u_t + 2u_x = t, \quad u(x,0) = \sin(\pi x).$$
   Si ha $u(x,t) =$ e $u(3,2) =$
3. Studio di $u_t + cu_x = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \ c$ costante: dimostrare esistenza, unicità e stabilità.
4. Equazione di trasporto omogenea su un intervallo $[0, L]$: dimostrare esistenza, unicità e stabilità.
   Si consideri poi il problema
   $$u_t + 2u_x = 0, \quad u(x,0) = \cos(x), \quad u(0,t) = 1.$$
   Si ha $u(x,t) =$
5. Lemma di Lax-Milgram: enunciato, unicità e stabilità.
6. Classificazione delle equazioni differenziali (a derivate parziali) del II ordine, lineari, a coefficienti costanti.
7. Diffusione del calore in una dimensione: unicità della soluzione e formulazione variazionale.
8. La soluzione di d'Alembert per l'equazione della corda vibrante. Domostrare unicità e stabilità.

9. Unicità e stabilità della soluzione dell'equazione delle onde su un intervallo finito.

10. Enunciare la disuguaglianza di Poincaré, e dare la dimostrazione in una dimensione.

11. Equivalenza in $H^1_0(\Omega)$ delle norme $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ e $\|v\|_{H^1(\Omega)}$.

12. Scrivere e dimostrare la formula di Gauss-Green in un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$.

13. Dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

14. Enunciare condizioni sufficienti sui dati $k(x)$ e $p(x)$ affinchè la forma bilineare
$$a(u,v) = \int_0^L k(x)\, u'\, v' + \int_0^L p(x)\, u\, v$$
sia continua e coerciva (ellittica) in $H^1_0(0,L)$.

15. Continuità e coercività (ellitticità) in $H^1_0(0,L)$ di
$$a(u,v) = \int_0^L (1+x)\, u'\, v'\, dx + \int_0^L 2\, u\, v\, dx.$$

16. Sia Ω un poligono convesso. Scrivere la formulazione variazionale del problema
$$-div(k(x)\underline{\nabla} u) = f \text{ in } \Omega, \qquad u = 0 \text{ sul bordo.}$$
Scrivere condizioni sufficienti sui dati affinchè siano verificate le ipotesi del Lemma di Lax-Milgram.

17. Sia Ω un poligono convesso. Scrivere la formulazione variazionale del problema
$$-div(k(x)\underline{\nabla} u) = f \text{ in } \Omega, \qquad u = g \text{ sul bordo.}$$
Scrivere condizioni sufficienti sui dati affinchè siano verificate le ipotesi del Lemma di Lax-Milgram.

18. Sia Ω un poligono convesso. Scrivere la formulazione variazionale del problema
$$-div(k(x)\underline{\nabla} u) + u = f \text{ in } \Omega, \qquad k(x)\underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = 0 \text{ sul bordo.}$$

Scrivere condizioni sufficienti sui dati affinchè siano verificate le ipotesi del Lemma di Lax-Milgram.

19. Sia Ω un poligono convesso. Scrivere la formulazione variazionale del problema

$$-div(k(x)\underline{\nabla} u) + u = f \text{ in } \Omega, \qquad k(x)\underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = g \text{ sul bordo.}$$

Scrivere condizioni sufficienti sui dati affinchè siano verificate le ipotesi del Lemma di Lax-Milgram.

20. Scrivere la formulazione variazionale del problema

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad u = 0 \text{ al bordo,}$$

e controllare che siano verificate le ipotesi del Lemma di Lax-Milgram.

21. Dato il problema variazionale:

$$\begin{cases} \text{trovare } u \in H_0^1(0,1) \text{ soluzione di} \\ \displaystyle\int_0^1 (1+x)u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 (1+4x)v(x)dx \quad \forall v \in H_0^1(0,1) \end{cases}$$

verificare l'applicabilità del Lemma di Lax-Milgram.
(Facoltativo: qual è la formulazione "forte" del problema?)

22. Dare la definizione degli spazi funzionali $L^1(0,1)$, $L^2(0,1)$ e $H^1(0,1)$. Si consideri poi la funzione

$$f(x) = x^r \quad x \in [0,1] \qquad r \in \Re$$

Per quali valori di r la funzione $f \in L^1(0,1)$? Per quali valori di r la funzione $f \in L^2(0,1)$? Per quali valori di r la funzione $f \in H^1(0,1)$?

23. Il metodo delle differenze finite per problemi ellittici in una variabile.

24. Il lemma di Céa per il metodo di Galerkin: enunciato e dimostrazione.

25. Il metodo degli elementi finiti per problemi ellittici in una variabile.

26. Problemi ellittici in 2D: approssimazione con Elementi Finiti continui e lineari a tratti.

27. Problemi parabolici in 2D: approssimazione con Elementi Finiti continui e lineari a tratti.

28. Il metodo di Galerkin per problemi ellittici.

29. Sul triangolo con vertici $V_1 = (0,0)$, $V_2 = (1,1)$, and $V_3 = (-1,1)$, calcolare la matrice di stiffness per l'approssimazione con elementi finiti lineari dell'operatore di Laplace.

30. Sul generico triangolo T calcolare la matrice di massa elementare per elementi finiti lineari.

31. Sul triangolo con vertici $V_1 = (0,0)$, $V_2 = (1,0)$, $V_3 = (0,1)$, calcolare l'espressione analitica delle tre funzioni di base $\varphi_i(x,y)$ $(i = 1,2,3)$.

32. Scrivere la formulazione variazionale del problema

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad u = 0 \text{ al bordo},$$

e quindi l'approssimazione con elementi finiti.

33. Si approssimi con elementi finiti continui e lineari a tratti il problema: trovare $u \in H_0^1(0,1)$ soluzione di

$$\int_0^1 k\, u'\, v' + \int_0^1 p\, u\, v = \int_0^1 v \quad \forall v \in H_0^1(0,1),$$

con k e p costanti positive.
Per $h = 1/3$ si calcolino matrici (di stiffness e di massa), e termine noto.

34. Si consideri una fune di lunghezza unitaria, fissata agli estremi e sottoposta ad una forza verticale f. Lo spostamento verticale $u(x)$ è soluzione del seguente problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} -u''(x) + ku(x) = f(x) & \text{in } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

dove $k > 0$ è il coefficiente di elasticità della fune. Si scriva la formulazione debole e l'approssimazione con elementi finiti.