

# Modellistica Numerica

Università di Pavia

20 Febbraio 2018 — ore 10.00 — aula C8

Punti totali: 32.

Durata dell'esame: 2 ore.

## Problema 1. Metodi upwind e delle differenze centrate

[13 punti]

Sia  $\epsilon \in \mathbb{R}$  positivo. Consideriamo la discretizzazione del problema al bordo di diffusione-trasporto

$$-\epsilon u'' + u' = 1 \quad \text{in } (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

con il metodo delle differenze finite. Fissiamo  $n$  nodi equispaziati  $x_j = j/(n+1)$ , per  $j = 1, \dots, n$ .

- Scrivere (i) il metodo delle differenze finite centrate e (ii) quello upwind, nel nodo  $x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .
- Mostrare che il metodo upwind può essere scritto come il metodo delle differenze centrate per un problema al bordo modificato.
- Scrivere matrice e termine noto per il sistema lineare corrispondente a ciascun metodo.
- Fissiamo  $\epsilon = 1/300$  e supponiamo di aver calcolato l'errore per entrambi i metodi misurandolo come

$$\max_{j=1, \dots, n} |u(x_j) - U_j|,$$

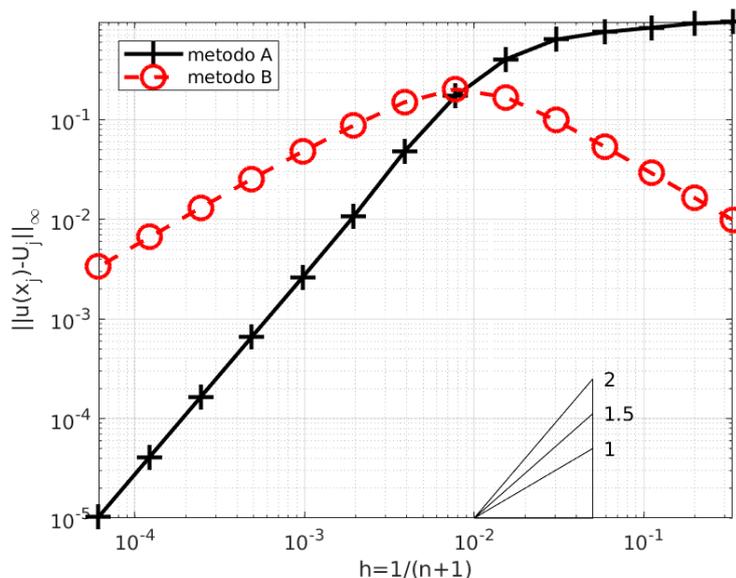
dove  $u$  è la soluzione esatta e  $\vec{U} \in \mathbb{R}^n$  quella discreta, per  $n = 2^1, \dots, 2^{14}$ . Il risultato è mostrato in figura, dove sulle ascisse abbiamo la distanza tra i nodi  $h = 1/(n+1)$ .

Quale dei due grafici (“metodo A” con segni + e linea continua, oppure “metodo B” con segni  $\circ$  e linea tratteggiata) corrisponde al metodo upwind e quale a quello delle differenze centrate?

Giustificare la risposta.

- Elencare almeno un vantaggio di ciascun metodo.

Suggerimento: la figura può aiutare.



---



---

SOLUZIONE: [(a)–(b)–(c) casi particolari di quanto visto in classe.] Notare che  $p \equiv 1$ . Definiamo  $h := 1/(n+1)$ .

(a) Differenze centrate:  $-\epsilon D_h^{2C} u + D_h^C u = -\frac{\epsilon}{h^2}(U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}) + \frac{1}{2h}(U_{j+1} - U_{j-1}) = 1,$

Upwind:  $-\epsilon D_h^{2C} u + D_h^- u = -\frac{\epsilon}{h^2}(U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}) + \frac{1}{h}(U_j - U_{j-1}) = 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad U_0 = U_{n+1} = 0.$

(b) Vale  $D_h^- U(x_j) = \frac{U_j - U_{j-1}}{h} = \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h} - \frac{h}{2} \cdot \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2} = D_h^C U(x_j) - \frac{h}{2} D_h^{2C} U(x_j),$  quindi  
 $-\frac{\epsilon}{h^2}(U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}) + \frac{1}{h}(U_j - U_{j-1}) = -\frac{\epsilon + \frac{h}{2}}{h^2}(U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}) + \frac{1}{2h}(U_{j+1} - U_{j-1}).$

Questo significa che il metodo upwind corrisponde a quello delle differenze centrate con  $\epsilon_h := \epsilon + \frac{h}{2}$  al posto di  $\epsilon$ , cioè il metodo upwind applicato al problema al bordo  $-(\epsilon + h/2)u'' + u' = 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$

(c)  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}\vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{b}}$  con

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{DC} = \begin{pmatrix} \frac{2\epsilon}{h^2} & -\frac{\epsilon}{h^2} + \frac{1}{2h} & & & \\ -\frac{\epsilon}{h^2} - \frac{1}{2h} & \frac{2\epsilon}{h^2} & -\frac{\epsilon}{h^2} + \frac{1}{2h} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{\epsilon}{h^2} - \frac{1}{2h} & \frac{2\epsilon}{h^2} & \\ & & & & \end{pmatrix} = \frac{\epsilon}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 + \frac{h}{2\epsilon} & & & \\ -1 - \frac{h}{2\epsilon} & 2 & -1 + \frac{h}{2\epsilon} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 - \frac{hp_n}{2\epsilon} & 2 & \\ & & & & \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{Upw} = \begin{pmatrix} \frac{2\epsilon}{h^2} + \frac{1}{h} & -\frac{\epsilon}{h^2} & & & \\ -\frac{\epsilon}{h^2} - \frac{1}{h} & \frac{2\epsilon}{h^2} + \frac{1}{h} & -\frac{\epsilon}{h^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{\epsilon}{h^2} - \frac{1}{h} & \frac{2\epsilon}{h^2} + \frac{1}{h} & \\ & & & & \end{pmatrix} = \frac{\epsilon}{h^2} \begin{pmatrix} 2 + \frac{h}{\epsilon} & -1 & & & \\ -1 - \frac{h}{\epsilon} & 2 + \frac{h}{\epsilon} & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 - \frac{h}{\epsilon} & 2 + \frac{h}{\epsilon} & \\ & & & & \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Il metodo upwind corrisponde al “metodo B” (cerchi e linea tratteggiata). Infatti asintoticamente il metodo upwind converge linearmente in  $h$ , mentre quello delle differenze centrate quadraticamente. Inoltre il metodo upwind è più accurato di quello delle differenze centrate per valori bassi di  $n$  quando lo strato limite non è risolto.<sup>1</sup>

(e) Il metodo delle differenze centrate converge a velocità maggiore,  $h^2$  invece di  $h$ , quindi è conveniente “asintoticamente” per valori piccoli di  $h$ .

Il metodo upwind è più accurato per valori bassi di  $n$  (dal grafico si vede che ha un errore migliore per  $h \gtrsim 10^{-2}$ ).

Il metodo upwind non presenta oscillazioni spurie, quindi anche con pochi nodi l'approssimazione è buona su tutta la parte del dominio non interessata dallo strato limite; le proprietà qualitative della soluzione discreta riflettono quelle della soluzione esatta.

---



---

<sup>1</sup>Si nota dal grafico che riducendo  $h$  da  $h = 1/2$  a  $h = 1/128$  l'errore del metodo upwind aumenta gradualmente, come è possibile? Questo accade perché il nodo  $n$ -esimo  $x_n = 1 - \frac{1}{n+1}$  cade sempre più vicino allo strato limite, quindi l'errore in quel nodo aumenta, mentre la soluzione è accurata su gran parte del dominio.

**Problema 2. Problema di Neumann: forma variazionale****[11 punti]**

Consideriamo il problema al bordo con condizioni di Neumann

$$-u'' + qu = f \quad \text{in } (a, b), \quad u'(a) = \alpha, \quad u'(b) = \beta. \quad (1)$$

Qui  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ,  $q \in C^0([a, b])$ ,  $f \in L^2(a, b)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Assumiamo anche che  $q(x) \geq 1$  in  $[a, b]$ .

- (a) Mostrare che se
- $u \in C^2(a, b)$
- è soluzione classica del problema al bordo (1), allora è anche soluzione debole del seguente problema variazionale:

trovare  $u \in H^1(a, b)$  tale che

$$\int_a^b (u'w' + quw) dx = \int_a^b fw dx + \beta w(b) - \alpha w(a) \quad \forall w \in H^1(a, b). \quad (2)$$

- (b) Scrivere questo problema debole in forma variazionale astratta in
- $V = H^1(a, b)$
- .

- (c) Dimostrare che questo problema soddisfa le ipotesi del Teorema di Lax–Milgram.

Si può usare, senza dimostrazione, il fatto che esiste una costante  $C_*$  tale che per ogni  $v \in H^1(a, b)$  ed ogni  $x \in [a, b]$  vale  $|v(x)| \leq C_* \|v\|_{H^1(a, b)}$ .

- (d) Dato uno spazio finito-dimensionale
- $V_h \subset V$
- con base
- $\varphi_1, \dots, \varphi_n$
- , scrivere matrice e termine noto del sistema lineare
- $\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{F}}$
- originato dal metodo di Galerkin applicato al problema (2).

Che conseguenze si possono dedurre dal soddisfacimento delle ipotesi del Teorema di Lax–Milgram per il metodo di Galerkin?

- (e) Mostrare che se
- $q = 0$
- su tutto
- $[a, b]$
- , allora il problema al bordo (1) non è ben posto.

Suggerimento: mostrare che viene violata o l'unicità della soluzione o la sua esistenza.

SOLUZIONE: (a) Dall'integrazione per parti, se  $u$  soddisfa (1),  $\forall w \in H^1(a, b)$  vale

$$\begin{aligned} \int_a^b fw dx &= \int_a^b (-u'' + qu)w dx = \int_a^b (u'w' + quw) dx - u'(b)w(b) + u'(a)w(a) \\ &= \int_a^b (u'w' + quw) dx - \beta w(b) + \alpha w(a) \quad \text{e riordinando si ha la tesi.} \end{aligned}$$

- (b) Il problema variazionale è: Trovare
- $u \in V$
- tale che
- $\mathcal{A}(u, w) = \mathcal{F}(w) \quad \forall w \in V$
- , dove

$$\mathcal{A}(u, w) := \int_a^b (u'w' + quw) dx, \quad \mathcal{F}(w) := \int_a^b fw dx + \beta w(b) - \alpha w(a), \quad V := H^1(a, b).$$

- (c) Usando le definizioni in (b), Cauchy–Schwarz,
- $|v(x)| \leq C_* \|v\|_{H^1(a, b)}$
- ,
- $q \geq 1$
- e la definizione delle norme

$$|\mathcal{F}(w)| \leq (\|f\|_{L^2(a, b)} + |\beta|C_* + |\alpha|C_*) \|w\|_{H^1(a, b)},$$

$$|\mathcal{A}(u, w)| \leq \|u'\|_{L^2(a, b)} \|w'\|_{L^2(a, b)} + \|q\|_{L^\infty(a, b)} \|u\|_{L^2(a, b)} \|w\|_{L^2(a, b)} \stackrel{q \geq 1}{\leq} \|q\|_{L^\infty(a, b)} \|u\|_{H^1(a, b)} \|w\|_{H^1(a, b)},$$

$$\mathcal{A}(w, w) = \int_a^b ((u')^2 + qu^2) dx \stackrel{q \geq 1}{\geq} \int_a^b ((u')^2 + u^2) dx = \|u\|_{H^1(a, b)}^2.$$

- (d)
- $\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{F}}$
- dove
- $F_j := \mathcal{F}(\varphi_j) = \int_a^b f\varphi_j dx - \beta\varphi_j(b) + \alpha\varphi_j(a)$
- ,
- $A_{j,k} := \mathcal{A}(\varphi_k, \varphi_j) = \int_a^b (\varphi_k'\varphi_j' + q\varphi_k\varphi_j)$
- .

Per ogni  $V_h \subset V$ , il metodo di Galerkin è ben posto, fornisce un sistema lineare simmetrico e definito positivo, ed è quasi-ottimale:  $\|u - u_h\|_{H^1(a, b)} \leq \max\{1, \|q\|_{L^\infty(a, b)}\} \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_{H^1(a, b)}$ .

- (e) Con
- $q = 0$
- , prendiamo ad esempio
- $(a, b) = (0, 1)$
- ,
- $\alpha = \beta = 0$
- e
- $f = 1$
- . Se esistesse una soluzione avremmo

$$\int_0^1 f dx = \int_0^1 -u'' dx = -u'(1) + u'(0) = \beta - \alpha$$

ma il termine a sinistra vale 1 e quello a destra zero, quindi non può esistere nessuna soluzione  $u$ .Alternativamente, con  $\alpha = \beta = 0$  e  $f = 0$ , tutte le funzioni costanti  $u(x) = c$  sono soluzioni del problema (1) ( $u'' = 0, u(a) = u(b) = 0$ ) e del problema (2) ( $\int_a^b u'w' = 0 \forall w \in H^1(a, b)$ ), che quindi non godono dell'unicità.

