La decomposizione di Lévy-Ito

L. La Rocca

Tesina per il corso del Prof. Fagnola, anno 2001

Un *processo* stocastico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$, definito sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ e adattato alla filtrazione $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, per semplicità a valori in $\Re$, si dice *di Lévy* se le sue traiettorie sono càdlàg e inoltre, per ogni $t \geq 0$, il processo $\{X(t+h)-X(t) : h \geq 0\}$ degli incrementi dopo t è indipendente da $\mathcal{F}_t$ e isonomo a X (dunque $X(0) = 0$ quasi certamente). Per una veloce introduzione ai processi di Lévy si può consultare, per esempio, Bertoin [2] o Sato [11]. In alternativa, l'argomento è trattato in alcuni testi avanzati di Probabilità, quali Breiman [3] e Kallenberg [6]. Per un'esposizione completa si rinvia invece alle monografie di Bertoin [1] e Sato [10].

Si può supporre, senza ledere la generalità, che lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sia completo e che ogni evento trascurabile appartenga a $\mathcal{F}_0$ (quindi a $\mathcal{F}_t$, per ogni $t \geq 0$). Se così non fosse, si potrebbe sempre, una volta effettuato il completamento, rimpiazzare $\mathcal{F}$ con la filtrazione $(\mathcal{F}_t \vee \mathcal{T})_{t\geq 0}$, dove $\mathcal{T}$ è la famiglia degli eventi trascurabili; il processo X resterebbe adattato, con incrementi indipendenti dal passato. Si può anche supporre che $\mathcal{F}$ sia continua a destra, eventualmente sostituendola con la sua regolarizzata destra $\mathcal{F}^+ = (\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s)_{t\geq 0}$, il che è lecito perché, per ogni $t \geq 0$, il processo degli incrementi dopo t è indipendente anche da $\mathcal{F}_t^+$ (una dimostrazione di questo fatto si trova, per esempio, in Pintacuda [8]). Diremo, in breve, che la filtrazione $\mathcal{F}$ soddisfa le *condizioni abituali.* Per fissare le idee, si può supporre che la filtrazione originale sia quella naturale.

Se T è opzionale per la filtrazione $\mathcal{F}$ continua a destra, il processo stocastico $\{X(T + h) - X(T) : h \geq 0\}$ degli incrementi dopo T risulta ancora un processo di Lévy, adattato a $(\mathcal{F}_{T+h})_{h\geq 0}$ e isonomo a X. Diremo, a parole, che X è *fortemente markoviano.* Anche la dimostrazione di questa proprietà può trovarsi, per esempio, in Pintacuda [8].

L'esempio più semplice di processo di Lévy è senz'altro la *traslazione* con velocità constante v, cioè $X(t) = vt$. Un esempio più sofisticato, molto importante nelle applicazioni, è il *moto browniano* con dispersione $\sigma > 0$, caratterizzato da $B(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$ e da traiettorie continue. Un altro esempio, di natura diversa, è il *processo di Poisson* di parametro $q > 0$, cioè

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_k \leq t\}}$$

con $T_k = U_1 + \cdots + U_k$ e le U_k indipendenti con legge comune $\mathcal{E}(q)$. Se poi si prende una successione Y indipendente da U di v.a. reali Y_k tra loro indipendenti e aventi comune legge λ (tale che $\lambda(\{0\}) = 0$), il processo

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \mathbf{1}_{\{T_k \leq t\}} = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$$

è ancora un esempio di processo di Lévy (detto processo di Poisson *composito*).

Gli esempi sopra esposti sono in qualche modo esaustivi, nel senso che il generico processo di Lévy risulta somma di quattro termini indipendenti: una traslazione uniforme, un moto browniano, un processo di Poisson composito con λ portata da $\{x \in \Re : |x| \geq 1\}$ (detto processo dei "grandi salti" di X) e un limite, in senso da precisare, di una successione di processi di Poisson compositi con λ portata da $\{x \in \Re : 0 < |x| < 1\}$ (tale limite è detto processo dei "piccoli salti" di X). Dimostreremo questo fatto, noto come *decomposizione di Lévy-Ito*, seguendo Bretagnolle [4] e Protter [9].

Non ci vuole molto a rendersi conto che, se X è un processo di Lévy, la legge di $X(1)$ è infinitamente divisibile; infatti, per ogni $n \in \aleph$, si può scrivere $X(1) = \sum_{k=1}^{n} X(k/n) - X((k-1)/n)$. La funzione caratteristica dell'incremento unitario è allora della forma

$$\phi_1(u) = \mathbf{E}\left[e^{iuX(1)}\right] = e^{\psi(u)}$$

con ψ funzione continua e nulla in zero. In realtà ψ, comunemente chiamata *esponente caratteristico* del processo di Lévy X, è regolare quanto ϕ_1, perché si ricava da quest'ultima prendendone il logaritmo complesso (analitico sulla superficie di Riemann opportuna). Quanto sopra richiede che, per ogni $u \in \Re$, si abbia $\phi_1(u) \neq 0$, come in effetti si ha.

Proposizione 1 *La funzione caratteristica di una legge infinitamente divisibile non si annulla mai.*

DIM.

Sia $\mu = \mu_n^{*n}$ una legge infinitamente divisibile e $\hat{\mu} = \hat{\mu}_n^n$ la sua funzione caratteristica. Prendendo il modulo quadro ad ambo i membri, cioè simmetrizzando, si trova $|\hat{\mu}_n|^2 = |\hat{\mu}|^{2/n}$, ossia una successione di funzioni caratteristiche che converge alla funzione $\phi = \mathbf{1}_{\{\hat{\mu} \neq 0\}}$. Poiché $\hat{\mu}$ è continua nell'origine, in un intorno di quest'ultima ϕ è costante, dunque anch'essa continua; allora, per il teorema di continuità di Lévy, ϕ risulta essere una funzione caratteristica e, come tale, può solo essere la costante $\mathbf{1}$. Se ne deduce che $\hat{\mu}$ non si annulla mai.

*

Passando alla funzione caratteristica di un incremento arbitrario, la proprietà di incrementi indipendenti omogenei permette di dimostrare la formula

$$\phi_t(u) = e^{t\psi(u)}$$

per valori razionali di t. Ma X è càdlàg, perciò la formula si estende per continuità (da destra) a valori reali arbitrari di t.

L'esponente caratteristico del processo di Poisson composito è

$$\psi_1(u) = q(\hat{\lambda}(u) - 1)$$

come si verifica calcolando

$$\phi_t(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\left\{N(t) = k\right\} \mathbf{E}\left[e^{iu(Y_1+\cdots+Y_k)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-qt}\frac{(qt)^k}{k!}\hat{\lambda}(u)^k.$$

Il caso del processo di Poisson semplice si ottiene per $\lambda = \delta_1$. L'esponente caratteristico della traslazione con velocità costante v è invece chiaramente

$$\psi_2(u) = ivu.$$

Per quanto riguarda infine il moto browniano con dispersione σ, si ricava

$$\psi_3(u) = -\frac{1}{2}\sigma^2 u^2$$

dalla formula per la funzione caratteristica della legge normale.

Se X è un processo di Lévy integrabile, allora

$$\mathbf{E}[X(t)] = \frac{1}{i}\left[\frac{\partial}{\partial u}e^{t\psi(u)}\right]_{u=0} = \frac{t}{i}\psi'(0) = t\mathbf{E}[X(1)]$$

e X può essere centrato per sottrazione di una traslazione uniforme. Tuttavia il generico processo di Lévy *non* è integrabile, perciò non si può partire in questo modo. È però possibile dare una semplice condizione sufficiente affinché X possegga (finiti) i momenti di ogni ordine. A tal fine, introduciamo il processo dei salti di X, vale a dire $\Delta X(t) = X(t) - \lim_{s\uparrow t} X(s)$.

Proposizione 2 *Se esiste $M > 0$ tale che $|\Delta X| \le M$, cioè se i salti di X hanno ampiezza limitata, allora X possiede (finiti) i momenti di ogni ordine.*

DIM.

Posto $T_0 = 0$, definiamo per ricorrenza su $n \ge 1$ la successione di tempi opzionali $T_n = \inf\{t > T_{n-1} : |X(t)| > M\}$. Si tratta effettivamente di tempi opzionali, per la filtrazione $\mathcal{F}$ continua a destra, perché si tratta dei successivi tempi di esordio nell'aperto $(M, +\infty)$ del processo $|X|$ continuo a destra. Inoltre $\Delta X(T_n) = X(T_n) - \lim_k X(T_n - 1/k) \in \mathcal{F}^+_{T_n}$ e, chiaramente, $|\Delta X(T_n)| \le M$. Per induzione, si mostra allora che $\sup_{t\le T_n} |X(t)| = \sup_{q\in\mathcal{Q}} |X(q)|\mathbf{1}_{\{T_n\ge q\}} \le 2nM$.

Gli intertempi aleatori $T_n - T_{n-1}$ sono indipendenti e isonomi, in virtù del fatto che il processo degli incrementi dopo T_{n-1} è isonomo a X e indipendente da $\mathcal{F}_{T_{n-1}}$. Pertanto $\mathbf{E}[e^{-T_n}] = (\mathbf{E}[e^{-T_1}])^n = a^n$, con $a < 1$ dal momento che X è continuo a destra. Allora

$$\mathbf{P}\{|X(t)| > 2nM\} \le \mathbf{P}\{T_n < t\} = e^t \int_{\{T_n<t\}} e^{-t} d\mathbf{P} \le e^t a^n$$

e siccome $\mathbf{E}|X(t)|^p = \int_{\Re_+} py^{p-1}\mathbf{P}\{|X(t)| > y\}dy$ il processo $|X|^p$ risulta integrabile per ogni $p \ge 1$.

*

Alla luce della condizione sufficiente data, si può pensare di cominciare sottraendo a X i suoi salti più "grandi". A tal fine, risulta utile il seguente risultato di misurabilità.

Proposizione 3 *Se X è càdlàg, allora* $\{\exists s \in (0,t) : |\Delta X(s)| \geq M\} \in \mathcal{F}_t$.

Dim.

Il caso interessante è $M > 0$. In tal caso, l'identità

$$\{\exists s \in (0,t) : |\Delta X(s)| \geq M\} = \bigcap_k \bigcup_{\substack{q,r \in \mathcal{Q} \cap (0,t) \\ 0 < r-q < \frac{1}{k}}} \left\{ |X(r) - X(q)| > M - \frac{1}{k} \right\}$$

dimostra la tesi. L'inclusione del primo membro nel secondo è diretta conseguenza dell'ipotesi, meno evidente è quella del secondo nel primo.

Siano $q_k, r_k \in \mathcal{Q} \cap (0,t)$ tali che $0 < r_k - q_k < 1/k$ e

$$|X(r_k) - X(q_k)| > M - 1/k.$$

Per compattezza, esiste $s \in [0,t]$ tale che, passando a una sottosuccessione, si abbia $r_k \to s$. Allora, per costruzione, si ha anche $q_k \to s$. Risulta poi $r_k \geq s$ definitivamente, altrimenti, passando di nuovo a una sottosuccessione, si avrebbe $q_k, r_k \uparrow s$ e (assurdo) $X(r_k) - X(q_k)$ sarebbe di Cauchy, in virtù dell'ipotesi. Analogamente si mostra che $q_k \leq s$ definitivamente. Pertanto $s \in (0,t)$ e $|\Delta X(s)| = \lim_k |X(r_k) - X(q_k)| \geq M$.

*

Posto $T_0 = 0$, definiamo per ricorrenza su $n \geq 1$ la successione di tempi opzionali $T_n = \inf\{t > T_{n-1} : |\Delta X(t)| \geq 1\}$. Si tratta effettivamente di tempi opzionali, perché $\{T_1 < t\} = \{\exists s \in (0,t) : |\Delta X(s)| \geq 1\}$. Inoltre, dato che le traiettorie non possono presentare discontinuità di seconda specie, i T_n non possono accumularsi al finito, ma devono farlo all'infinito; in altre parole, si ha quasi certamente $T_1 > 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}} < \infty$. Essendo poi X fortemente markoviano, le variabili $U_n = T_n - T_{n-1}$ sono indipendenti e isonome con legge comune $\mathcal{E}(q)$, per un certo $q \geq 0$; si ha infatti

$$\mathbf{P}\{T_1 > s + t\} = \mathbf{P}\{T_1 > s, \tilde{T}_1 > t\} = \mathbf{P}\{T_1 > s\}\mathbf{P}\{T_1 > t\}$$

dove $\tilde{T}_1$ è relativo al processo $\tilde{X}$ degli incrementi dopo s. Infine, con la stessa notazione, risulta $\mathbf{P}\{\Delta X(T_1) \in A, T_1 > s\} = \mathbf{P}\{\Delta\tilde{X}(\tilde{T}_1) \in A, T_1 > s\}$ che si fattorizza in $\mathbf{P}\{\Delta X(T_1) \in A\}\mathbf{P}\{T_1 > s\}$ perché $\tilde{X}$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$ e isonomo a X, mentre $\{T_1 > s\} \in \mathcal{F}_s$ dato che T_1 è opzionale. Se $q = 0$, allora $|\Delta X| < 1$; altrimenti è ben definito il processo di Poisson composito

$$X_G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta X(T_n) \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}$$

che diremo *processo dei grandi salti* di X. Per sottrazione, si ottiene un processo di Lévy $X - X_G$ i cui salti sono di ampiezza limitata (da 1) e, di conseguenza, i cui momenti assoluti di ogni ordine sono finiti. Si osservi che X_G e quindi $X - X_G$ sono adattati alla filtrazione $\mathcal{F}$ con cui si considera X, grazie al fatto che i T_n sono opzionali e $\Delta X(T_n) \in \mathcal{F}_{T_n}$; inoltre essi hanno evidentemente incrementi indipendenti e omogenei rispetto a tale filtrazione.

Ora è possibile effettuare la centratura, mediante la traslazione uniforme $X_U(t) = \mathbf{E}[X(t) - X_G(t)] = vt$, per un certo $v \in \Re$. Resta da studiare il processo $Z = X - X_G - X_U$ che è un processo di Lévy centrato con salti di ampiezza limitata (da 1).

Si supponga, per il momento, che l'ampiezza dei salti di X sia limitata inferiormente ($\exists m > 0 : |\Delta X| \geq m$). In questo particolare caso, tutti i salti sono "grandi" e si può supporre Z continuo (a patto di utilizzare m al posto di 1 come soglia per la costruzione del processo X_G).

Proposizione 4 *Se B è un processo di Lévy centrato e le sue traiettorie sono continue, allora esiste $\sigma \in \Re_+$ tale che B è un browniano con dispersione σ.*

DIM.

Sarà sufficiente dimostrare che $\mathbf{E}[e^{iuB(t)}] = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 t}$ per caratterizzare la legge degli incrementi (e quindi quella del processo).

Iniziamo osservando che la continuità delle traiettorie implica l'esistenza di tutti i momenti, il primo dei quali è nullo per ipotesi. Per il secondo, si ha

$$\mathbf{E}[B(t)^2] = -\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} e^{t\psi(u)}\right]_{u=0} = -t\psi''(0) = t\sigma^2$$

con $\sigma > 0$ nel caso non banale. A meno di un fattore moltiplicativo, si può supporre $\sigma = 1$. Analogamente, senza esplicitare le costanti, ma ricordando che $\psi'(0) = 0$, risulterà $\mathbf{E}[B(t)^4] = at + bt^2 + ct^3$.

Presa una suddivisione $\pi^{(n)} = \{kt/2^n\}_{k=0}^{2^n}$ dell'intervallo $[0, t]$, adottiamo la notazione $t_k = kt/2^n$, $\delta t_k = t_k - t_{k-1}$ e $\delta B_k = B(t_k) - B(t_{k-1})$, per $k = 1 \dots 2^n$. Calcoliamo poi

$$\mathbf{E}\left[e^{iuB(t)} - 1\right] = \sum_k \mathbf{E}\left[e^{iuB(t_k)} - e^{iuB(t_{k-1})}\right]$$

mediante uno sviluppo di Taylor con resto di Lagrange del secondo ordine, ottenendo così

$$iu \sum_k \mathbf{E}\left[e^{iuB(t_{k-1})}\delta B_k\right] - \frac{u^2}{2}\sum_k \mathbf{E}\left[e^{iu(B(t_{k-1})+\theta_k \delta B_k)}\delta B_k^2\right]$$

con $\theta_k \in [0, 1]$. Il primo termine è nullo, perché δB_k ha speranza nulla ed è indipendente da $B(t_{k-1})$, mentre il secondo, addizionando e sottraendo un medesimo termine, diviene

$$-\frac{u^2}{2}\sum_k \mathbf{E}\left[e^{iuB(t_{k-1})}\delta B_k^2\right] - \frac{u^2}{2}\sum_k \mathbf{E}\left[\left(e^{iu(B(t_{k-1})+\theta_k\delta B_k)} - e^{iuB(t_{k-1})}\right)\delta B_k^2\right].$$

Il primo termine di quest'ultima espressione vale $-\frac{u^2}{2}\sum_k \phi_{t_{k-1}}(u)\delta t_k$ che tende, al tendere di n all'infinito, verso $-\frac{u^2}{2}\int_0^t e^{s\psi(u)}ds$. Sarà allora sufficiente mostrare che il secondo termine tende a zero, per ottenere

$$e^{t\psi(u)} - 1 = -\frac{u^2}{2}\int_0^t e^{s\psi(u)}ds = -\frac{u^2}{2\psi(u)}(e^{t\psi(u)} - 1)$$

e dunque $\psi(u) = -\frac{u^2}{2}$, cioè la tesi.

Riguardo al secondo termine, cominciamo da una disuguaglianza nel piano complesso. Per u fissato e $\alpha < \alpha_0(u)$, dato che $|\theta_k| \leq 1$, se $|\delta B_k| < \alpha$, allora $|e^{iu\theta_k \delta B_k} - 1| \leq 2|u|\alpha$, come si può ad esempio verificare per via grafica. Se

$$A_\alpha^n = \left\{ \sup_{1\leq k \leq n} \sup_{(k-1)t/2^n \leq s,z \leq kt/2^n} |B(s) - B(z)| < \alpha \right\}$$

è poi l'evento su cui si vuole applicare tale disuguaglianza, risulta $A_\alpha^n \uparrow_n \Omega$ per l'uniforme continuità delle traiettorie, quando le si pensi ristrette a $[0,t]$. Il modulo del secondo termine si maggiora allora con

$$\alpha \, |u|^3 \int_{A_\alpha^n} \sum_{k=1}^n \delta B_k^2 d\mathbf{P} + |u|^2 \int_{\Omega \setminus A_\alpha^n} \sum_{k=1}^n \delta B_k^2 d\mathbf{P}$$

e dunque, applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, con

$$\alpha |u|^3 t + |u|^2 \left(\mathbf{P}(\Omega \setminus A_\alpha^n)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{E} \left| \sum_{k=1}^n \delta B_k^2 \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Ora $\mathbf{E}|\sum_{k=1}^n \delta B_k^2|^2 = \sum_{k=1}^n (a\delta t_k + b\delta t_k^2 + c\delta t_k^3) + \sum_{h \neq k} \delta t_h \delta t_k = O(t + t^2)$ per $n > n_0(t)$, quindi il secondo termine è in valore assoluto definitivamente minore di $2\alpha |u|^3 t$, cioè tende a zero (dal momento che α è arbitrario).

*

Al fine di completare la decomposizione di Lévy-Ito, almeno per processi privi di "piccoli salti", resta da dimostrare l'indipendenza di X_G da $X - X_G$ (la traslazione uniforme X_U, in quanto deterministica, è senz'altro indipendente dalla coppia $X_G, X - X_G$). Per $u \in \Re$ fissato arbitrario, il processo

$$L_u(t) = \frac{e^{iuX_G(t)}}{\mathbf{E}[e^{iuX_G(t)}]} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} L(T_n) \mathbf{1}_{\{T_n \leq t < T_{n+1}\}}$$

è una martingala càdlàg limitata nulla al tempo zero, come pure il processo

$$M_u(t) = \frac{e^{iu(\,X(t) - X_G(t)\,)}}{\mathbf{E}[e^{iu(\,X(t) - X_G(t)\,)}]} - 1$$

che però non ha le traiettorie costanti a tratti. Si osservi che $\Delta L_u(t) \neq 0$ implica $\Delta M_u(t) = 0$ per costruzione. Calcoliamo

$$\mathbf{E}[L_u(t) M_u(t)] = \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{2^n-1} L_u(t_{k+1}) - L_u(t_k) \sum_{k=0}^{2^n-1} M_u(t_{k+1}) - M_u(t_k) \right]$$

con $t_k = \frac{kt}{2^n}$ e $n \in \aleph$, ottenendo

$$\mathbf{E}[L_u(t) M_u(t)] = \mathbf{E}\left[\sum_{k=0}^{2^n-1} \left(L_u(t_{k+1}) - L_u(t_k)\right)\left(M_u(t_{k+1}) - M_u(t_k)\right) \right]$$

grazie alla proprietà di martingala. Ora, per $n \to \infty$, l'integrando converge quasi certamente a $\sum_{m \geq 0} \Delta L_u(T_m) \Delta M_u(T_m) \mathbf{1}_{\{T_m \leq t\}} = 0$ e la convergenza è dominata da $4\sum_{m\geq 0}\mathbf{1}_{\{T_m\leq t\}} \sim \mathcal{P}(4qt)$. Pertanto $\mathbf{E}[L_u(t)M_u(t)] = 0$ e di conseguenza, valendo il teorema di unicità della funzione caratteristica, $X_G(t)$ e $X(t) - X_G(t)$ sono indipendenti, per ogni $t \in \Re_+$. Tanto basta a dimostrare l'indipendenza dei processi X e $X - X_G$, dato che questi ultimi hanno incrementi indipendenti e omogenei rispetto a una medesima filtrazione (la verifica può condursi calcolando le funzioni caratteristiche delle sottofamiglie finite di incrementi).

Per studiare il caso generale, in cui Z non può pensarsi continuo, ma deve essere pensato con salti di ampiezza limitata (diciamo da 1), ritorniamo brevemente alla costruzione di X_G. Come corollario di tale costruzione, si ha che $N_B(t) = \sum_{s\leq t}\Delta X(s)\mathbf{1}_{\{\Delta X(s)\in B\}}$ è un processo di Poisson, quando si prenda $B = \{x \in \Re : |x| \geq 1\}$. Analogamente, senza difficoltà, si mostra che $N_B(t)$ è un processo di Poisson anche per $B = [a, b[$ con $a, b > 0$. Infatti, il caso $B = [a, \infty[$ è solo una variante del caso già visto, mentre il caso generale vi si riconduce considerando il processo privato dei salti di ampiezza (con segno) maggiore o uguale a b. Più in generale $N_B(t)$ è un processo di Poisson ogni qual volta B sia un boreliano con distanza strettamente positiva dall'origine. Questo fatto è però molto più difficile da dimostrare, perché richiede il teorema generale di opzionalità degli esordi per processi progressivi. Un tentativo di trattare l'argomento in forma semplificata è stato fatto da Dellacherie [5]; in alternativa, si può consultare Meyer [7]. Anche senza usare il risultato generale, per $\omega \in \Omega$ e $t \in \Re_+$, esiste una e una sola misura su $\Re\backslash\{0\}$ che valga $N^{\omega}_{[a,b[}(t)$ sull'intervallo $[a, b[$ aperto a destra ($0 < a < b$). Tale misura è concentrata sui valori assunti da ΔX fino al tempo t e permette di rappresentare in forma integrale il processo dei grandi salti di X:

$$X^{\omega}_G(t) = \int_{\{x:|x|\geq 1\}} x N^{\omega}_{dx}(t).$$

Analogamente, esiste una e una sola misura ν su $\Re\backslash\{0\}$ tale da soddisfare $\nu([a, b[) = \mathbf{E}[N_{[a,b[}(1)]$ per ogni $a, b > 0$; essa viene detta *misura di Lévy* del processo X. Evidentemente $\nu(B)$ è l'intensità del processo di Poisson N_B.

Se ora Z è un processo di Lévy centrato con salti di ampiezza limitata da 1 e di conseguenza una martingala di quadrato integrabile, definiamo per $k \geq 1$ i processi di Poisson compositi $Z^{\omega}_k(t) = \int_{\{x:1/(k+1)\leq|x|<1/k\}} x N^{\omega}_{dx}(t)$ e osserviamo che questi sono tra loro indipendenti, perché costruibili in successione come processi di grandi salti. I suddetti processi sono inoltre integrabili, perché i loro salti sono presi da Z e dunque hanno ampiezza limitata da 1. Allora si può centrare il generico Z_k, ottenendo una martingala di quadrato integrabile; sia essa $M_k = Z_k - \mathbf{E}[Z_k]$. Posto $Z^n_d = \sum_{k=1}^{n} M_k$ e $Z^n_c = Z - Z^n_d$, risulta

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}[M^2_k(t)] = \mathbf{Var}[Z^n_d(t)] = \mathbf{Var}[Z(t)] - \mathbf{Var}[Z^n_c(t)] \leq \mathbf{Var}[Z(t)] < \infty$$

dato che Z^n_d e Z^n_c sono indipendenti per costruzione. Ne segue che, per t fissato, $Z^n_d(t)$ converge in media quadratica a un certo $Z_d(t)$ e, di conseguenza, lo stesso fa $Z^n_c(t)$ con un certo $Z_c(t)$. Grazie alla disuguaglianza di Doob, la convergenza è uniforme sull'intervallo $[0, t]$ e quindi, passando alla convergenza quasi certa lungo una sottosuccessione, si verifica che Z_d è càdlàg e Z_c continuo. Ora, per costruzione, Z_d è un limite uniforme in media quadratica di processi di Poisson compositi compensati, mentre abbiamo già visto che Z_c può solo essere un moto browniano.

Alla decomposizione $X = X_G + X_U + Z_c + Z_d$ del processo X corrisponde una decomposizione $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4$ del suo esponente caratteristico ψ, nota come *formula di Lévy-Khintchine*. Per renderla completamente esplicita dobbiamo esprimere la legge λ di $\Delta X(T_1)$ e l'esponente caratteristico ψ_4 di Z_d in funzione di ν (misura di Lévy del processo X).

Se $B = \{x \in \Re : |x| \geq 1\}$, allora $\mathbf{P}\{\Delta X(T_1) \in A\} = \nu(A \cap B)/\nu(B)$, perché si tratta della probabilità che il primo salto di $N_{A\cap B}$ preceda il primo salto di $N_{A^c \cap B}$ e i due Poisson sono indipendenti. Pertanto $q\lambda(dx) = \mathbf{1}_B(x)\nu(dx)$ e

$$\psi_1(u) = \int_{\{x:|x|\geq 1\}} (e^{iux} - 1)\nu(dx).$$

D'altra parte, per calcolare ψ_4, è sufficiente osservare che

$$\mathbf{E}\left[e^{iuZ_d(t)}\right] = \mathbf{E}\left[e^{iu \lim_n Z_d^n(t)}\right] = \lim_n \mathbf{E}\left[e^{iuZ_d^n(t)}\right]$$

e inoltre

$$\mathbf{E}\left[e^{iuZ_d^n(t)}\right] = \exp\left\{t\int_{\{x\in\Re:1/(n+1)\leq|x|<1\}} (e^{iux} - 1 - iux)\,\nu(dx)\right\};$$

quest'ultimo fatto segue da

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Z_k(t)] &= \frac{1}{i}\left[\frac{d}{du}\exp\left\{t\int_{\{x\in\Re:1/(k+1)\leq|x|<1/k\}} (e^{iux} - 1)\,\nu(dx)\right\}\right]_{u=0} \\ &= t\int_{\{x\in\Re:1/(k+1)\leq|x|<1/k\}} x\,\nu(dx).\end{aligned}$$

In conclusione, il termine Z_d è caratterizzato da

$$\psi_4(u) = \int_{\{x:|x|<1\}} (e^{iux} - 1 - iux)\,\nu(dx).$$

La formula di Lévy-Khintchine può pertanto scriversi

$$\psi(u) = ivu - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \int_{\Re\setminus\{0\}} \left(e^{iux} - 1 - iux\mathbf{1}_{\{x<1\}}\right)\,\nu(dx),$$

con v, σ e ν parametri che individuano univocamente il processo X.

Riferimenti bibliografici

[1] J. Bertoin. *Lévy Processes.* Cambridge University Press, 1996.

[2] J. Bertoin. Some elements on Lévy processes. In *Handbook of Statistics Vol. 19: Stochastic Processes: Theory and Methods.* North Holland, 2001.

[3] L. Breiman. *Probability.* Classics in Applied Mathematics—SIAM, 1992.

[4] J. L. Bretagnolle. Processus à accroissements independants. In *Ecole d'Été de Probabilités: Processus Stochastiques*. Springer-Verlag, 1973.

[5] C. Dellacherie. Mesurabilité des débuts et théorème de section: le lot à la portée de toutes les bourses. In *Séminaire de Probabilités XV (1979/80)*. Springer-Verlag, 1981.

[6] O. Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. Springer, 1997.

[7] P. A. Meyer. *Probabilités et Potentiel*. Hermann, 1966.

[8] N. Pintacuda. *Probabilità*. Decibel-Zanichelli, 1994.

[9] P. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations. A New Approach*. Springer-Verlag, 1990.

[10] K. I. Sato. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, 1999.

[11] K. I. Sato. Basic results on Lévy processes. In *Lévy processes*. Birkhäuser Boston, 2001.