I p-value sono variabili aleatorie

uniformemente distribuite sull'intervallo zero-uno

Luca La Rocca[1]

Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche
Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia

Insegnamento di Analisi Statistica dei Dati
Corsi di Laurea Magistrale in Informatica e Matematica
Anno Accademico 2018/2019

[1] `http://personale.unimore.it/rubrica/dettaglio/llarocca`

se l'ipotesi nulla è semplice

Sia $p = \mathbb{P}_{\theta_0}\{D_0 > d_0^\bullet\}$ il p-value contro l'ipotesi nulla $H_0 : \theta = \theta_0$ basato sull'osservazione $z^\bullet$, dove $D_0 = d(Z, \theta_0)$ è una discrepanza[2] tra Z e θ_0, mentre $d_0^\bullet = d(z^\bullet, \theta_0)$ è il valore osservato di D_0.

Per esempio, nel caso del test del punteggio, abbiamo $D_0 = S(\theta_0)^2$, dove $S(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} \log f(Z; \theta)$, se $f(z|\theta)$, $z \in \mathcal{Z}$, è la densità che definisce il modello statistico per Z al variare di θ in H.

Se $F_0(t) = \mathbb{P}_{\theta_0}\{D_0 \leq t\}$, $t \in \mathbb{R}$, è la funzione di ripartizione di D_0 sotto $\mathbb{P}_{\theta_0}$ (sotto l'ipotesi nulla), allora $p = 1 - F_0(d_0^\bullet)$ e quindi $P = 1 - F_0(D_0)$ è chiaramente una variabile aleatoria.

[2] tale che $d(Z, \theta) \geq 0$ per ogni $\theta \in H$ e $d(Z, \hat{\theta}(Z)) = 0$ per un'opportuno stimatore $\hat{\theta}(Z)$ di θ (nell'esempio lo stimatore di massima verosimiglianza)

e la statistica test ha funzione di ripartizione invertibile

Con semplici passaggi troviamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\theta_0}\{P \leq u\} &= \mathbb{P}_{\theta_0}\{1 - F_0(D_0) \leq u\} \\
&= \mathbb{P}_{\theta_0}\{F_0(D_0) \geq 1 - u\} \\
&= \mathbb{P}_{\theta_0}\{D_0 \geq F_0^{-1}(1 - u)\} \\
&= 1 - F_0(F_0^{-1}(1 - u)) \\
&= 1 - (1 - u) \\
&= u, \qquad u \in \,]0, 1[,
\end{aligned}$$

mentre $\mathbb{P}_{\theta_0}\{P \leq u\} = 0$ per $u \leq 0$ e $\mathbb{P}_{\theta_0}\{P \leq u\} = 1$ per $u \geq 1$, di modo che $P \sim \mathcal{U}(0, 1)$ sotto $\mathbb{P}_{\theta_0}$.

with credit where credit is due

Murdoch, D. J., Tsai, Y. L., Adcock, J. (2008). P-values are random variables. The American Statistician, 62(3), 242–245.

`http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1198/000313008X332421`