Avversione al rischio e concentrazione del reddito

Eugenio Regazzini (a Pavia)

da un lavoro in collaborazione con *Eleonora Perversi*[1]

Convegno in onore di Patrizia Berti: Modena, 8-9.VI.2015

[1]Dipartimento di Matematica "F. Casorati"
eleonora.perversi@unipv.it

Introduzione

La distribuzione dei redditi individuali è stata studiata per confermare o smentire la sua forma paretiana e per evidenziarne alcuni interessanti legami con certi aspetti importanti di un'economia avanzata, tra i quali:

- Avversione al rischio
- Ricchezza iniziale, distribuzione del rischio nel tempo e distribuzione della ricchezza nel lungo termine
- Processo di crescita e sviluppo
- Politica ottimale di tassazione
- Redistribuzione e benessere sociale
- altri...

Per studiare i problemi sopraelencati, accanto al punto di vista di teorie economiche "ortodosse", a partire dagli anni '80 (Angle, 1986) si è sviluppata una fiorente letteratura "econofisica".

La relazione si sofferma sul legame tra avversione al rischio e concentrazione del reddito (Friedman, 1953).
Ad ogni tempo t, il reddito I_t si può supporre così decomposto

$$I_t = S_t + V_t$$

dove S_t rappresenta il livello di sussistenza e V_t il surplus o il deficit (s/d).
Assumendo che

- V_t e S_t siano stocasticamente indipendenti
- la sussistenza S_t sia una variabile esogena

costruiamo un modello per l'analisi del comportamento nel lungo termine della legge di V_t.

L'economia oggetto di studio si suppone composta da agenti che interagiscono a due a due e gli s/d di due agenti I e II si denotano, rispettivamente, con v e w. Assumiamo inoltre che questi ultimi, a causa di un'interazione, si trasformino in

$$\begin{aligned} v' &= l_{\mathrm{I}} v + r_{\mathrm{I}} w \\ w' &= r_{\mathrm{II}} v + l_{\mathrm{II}} w \end{aligned}$$

dove $(l_{\mathrm{I}}, r_{\mathrm{I}})$ e $(l_{\mathrm{II}}, r_{\mathrm{II}})$ sono vettori aleatori aventi come legge comune una m.d.p. τ, logicamente indipendente da (v, w) e t. (Si veda Bassetti, Ladelli, Matthes (2011) per questo genere di modelli.)
Eventuali differenze $v' - v$ e $w' - w$ vanno intese come incrementi (positivi o negativi) dei rispettivi patrimoni personali di I e II.

Il comportamento degli agenti di fronte all'incertezza viene caratterizzato facendo uso dell'*indice relativo di avversione al rischio* (i.r.a.r.) (de Finetti 1952, Pratt 1964 e Arrow 1965, 1971).
Per una funzione di utilità del denaro $\bar{u}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tale indice è definito da

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto -x\bar{u}''(x)/\bar{u}'(x).$$

Segue una breve digressione sul senso di questa definizione.
Dati un guadagno aleatorio con f.r. F, un punto x_0 del supporto di F ed un arbitrario $\varepsilon > 0$, si pone

$$\mathbb{R} \in x \mapsto F_0(x) := \frac{F(x)\mathbb{1}_{(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]}(x) + \mathbb{1}_{(x_0+\varepsilon,+\infty)}(x)}{F(x_0+\varepsilon) - F(x_0-\varepsilon)}$$

per la f.r. del guadagno troncato.

Quindi si indica con $\hat{g}_0$ l'equivalente certo del guadagno troncato, ovvero

$$\int_{(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]} \bar{u}(x)dF_0(x) = \bar{u}(\hat{g}_0).$$

Per ε sufficientemente piccolo, un'ovvia applicazione della formula di Taylor conduce a

$$\frac{\int_{(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]}(x-\hat{g}_0)dF_0(x)}{\int_{(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]}(x-\hat{g}_0)^2 dF_0(x)} \simeq -\frac{\bar{u}''(\hat{g}_0)}{2\bar{u}'(\hat{g}_0)} \simeq -\frac{\bar{u}''(x_0)}{2\bar{u}'(x_0)}.$$

Il significato di i.a.r. del membro di destra si evince da quello più evidente del membro di sinistra. Si moltiplica per x per avere un indice adimensionale (del tipo $val^2 : val^2$).

Nel lavoro con Perversi abbiamo ipotizzato che

l'i.r.a.r. sia costante ed abbia valore $\lambda < 1/2$ per tutti gli agenti.

Ne risulta la seguente funzione di utilità del denaro

$$\bar{u}(x) = |x|^{1-2\lambda}\mathrm{sign}(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

se, senza perdere in generalità, si assume che debba valere $\bar{u}(0) = 0$ con $\bar{u}(1) = 1$.

Consideriamo, poi, le due fonti degli s/d derivanti dall'interazione tra agenti come beni *indipendenti*, assumendo l'additività delle funzioni di utilità individuali nell'esprimere preferenze collettive, si perviene alla prima ipotesi del modello:

(H_1) *Per ogni coppia di agenti I e II, le funzioni di utilità congiunta prima e dopo l'interazione sono date, rispettivamente, da*

$$|v|^{1-2\lambda}\mathrm{sign}(v) + |w|^{1-2\lambda}\mathrm{sign}(w)$$

e

$$|v|^{1-2\lambda}\left(l_{\mathrm{I}}^{1-2\lambda} + r_{\mathrm{II}}^{1-2\lambda}\right)\mathrm{sign}(v) + |w|^{1-2\lambda}\left(r_{\mathrm{I}}^{1-2\lambda} + l_{\mathrm{II}}^{1-2\lambda}\right)\mathrm{sign}(w).$$

Quindi, per ogni p in $(0, +\infty)$ per cui la funzione

$$p \mapsto \mathcal{S}(p) = \mathcal{S}(p;\tau) := \int_{[0,+\infty)^2} (l^p + r^p)\tau(dldr) - 1 \qquad 0^0 := 1,$$

non cambia di segno, l'utilità congiunta attesa post-interazione aumenta o diminuisce localmente a seconda del segno dell'utilità pre-interazione, ma **indipendentemente** dal segno della variazione di p. Questa osservazione fa ritenere che, per essere ammissibile, τ debba soddisfare anche la successiva ipotesi sul comportamento di fronte all'incertezza:

(H_2) *La m.d.p. τ è tale che $\mathcal{S}$ cambi di segno in $(0, +\infty)$, e l'i.r.a.r. λ è il numero per cui $1 - 2\lambda$ coincide con la radice più piccola di $\mathcal{S}(p) = 0$.*

(**N.B.** $\mathcal{S}(p) = 0$ ha al più due radici distinte. La seconda, se esiste e viene adottata come valore di $(1 - 2\lambda)$, implica la convergenza della distribuzione di V_t verso una distribuzione degenere.)

Costruzione del modello

- Si suppone che vi siano N agenti e che, ai tempi scanditi da un "orologio di Poisson", due di essi si incontrano "a caso" e scambiano risorse secondo la regola testé descritta.
- Si assegna una distribuzione iniziale (all'istante zero) degli N s/d che li renda i.i.d.. Si ricava l'equazione retrospettiva (di Kolmogorov) nota, in questo contesto, come *Kac's master equation*.
- Sotto condizioni opportune, si dimostra che, se il numero di agenti N diverge più che esponenzialmente rispetto al tempo, le leggi finito-dimensionali, ad ogni $t > 0$, convergono (in variazione totale) a prodotti della stessa legge marginale μ_t, la quale, a sua volta, soddisfa il seguente problema di Cauchy con dato iniziale μ_0 (Graham e Méléard 1997)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi(v)\mu_t(dv) = \int_{\mathbb{R}} \psi(v) Q^+(\mu_t)(dv) - \int_{\mathbb{R}} \psi(v)\mu_t(dv) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (t \geq 0,\ \psi \in C_b(\mathbb{R};\mathbb{R})) \\ \mu_{0+} = \mu_0 \end{cases} \tag{C}$$

dove $Q^+(\mu_t)$ è la m.d.p. che soddisfa

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(v) Q^+(\mu_t)(dv) := \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \psi(lv + rw)\mu_t(dv)\mu_t(dw)\tau(dldr)$$

per ogni ψ in $C_b(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Questo problema è stato studiato inizialmente da Bassetti, Ladelli e Matthes 2011 e, successivamente, ancora da Bassetti e Ladelli 2012, Bassetti e Perversi 2013, Perversi e Regazzini 2015.

Comportamento asintotico di μ_t

Conformemente all'obiettivo principale del lavoro, si presentano condizioni sul dato iniziale μ_0 affinché la legge μ_t converga (debolmente) verso una distribuzione di equilibrio, al divergere del tempo. Sostanzialmente, esse dicono che tale convergenza è garantita solo se il dato iniziale μ_0 presenta code di tipo paretiano ($\mu_0(-\infty, -x] \sim c_1 x^{-\alpha}$, $\mu_0(x, +\infty) \sim c_2 x^{-\alpha}$, per $x \to +\infty$) e che, inoltre, la distribuzione limite presenta code analoghe. Qui ci si limita ad esporre il risultato relativo alle situazioni realistiche (conformi, cioè, all'esperienza empirica) in cui α risulta essere, generalmente, maggiore di 1.

Sotto (H_1)-(H_2) *con* λ *in* $(-1/2, 0)$, *si assume che* (i) *le distribuzioni marginali di* τ *siano continue, e che* (ii) *l'insieme* $\{(x, y) \in [0, +\infty)^2 : \ x^{1-2\lambda} + y^{1-2\lambda} = 1\}$ *sia contenuto nel supporto topologico di* τ. *Allora, affinché* μ_t *converga, per* $t \to +\infty$, *è necessario e sufficiente che*

$$\lim_{x \to +\infty} x^{1-2\lambda} \mu_0(-\infty, -x] = c_1, \qquad \lim_{x \to +\infty} x^{1-2\lambda} \mu_0(x, +\infty) = c_2 \qquad (1)$$

sia verificata e μ_0 *abbia valore atteso nullo.*
In tal caso, la legge limite è data da una mistura di leggi stabili di esponente $(1 - 2\lambda)$.

Se le code di μ_0 sono paretiane di esponente $(1-2\lambda)$ con $c_1 c_2 > 0$, allora anche le code della legge limite μ_∞ sono paretiane, nel senso che

$$\mu_\infty(-\infty, -x] \sim c_1 x^{-(1-2\lambda)}, \quad \mu_\infty(x, +\infty) \sim c_2 x^{-(1-2\lambda)} \quad (x \to +\infty).$$

Legame tra avversione al rischio e disuguaglianza

Vi è dunque un legame stretto tra l'esponente delle code e l'i.r.a.r.. Tale legame ammette un'interessante interpretazione in termini di *funzione di concentrazione di Lorenz-Gini* degli s/d.

Ad ogni funzione di ripartizione (f.r.) F con media finita (e diversa dalla f.r. degenere in zero) si associa la f.r. A_F del valore assoluto del numero aleatorio distribuito secondo F e si considera l'inversa generalizzata A_F^{-1}. L'interpolazione lineare della funzione

$$\mathcal{R}(A_F) \cap (0,1) \ni \theta \mapsto \varphi_F(\theta) := \frac{1}{\int_0^{+\infty} x dA_F(x)} \int_0^{\theta} A_F^{-1}(t) dt$$

è la ben nota *funzione di concentrazione di Lorenz-Gini* di A_F.

Se due f.r. F_1 e F_2 aventi media finita sono tali che

$$\varphi_{F_1} \leq \varphi_{F_2} \qquad \text{con} \qquad \varphi_{F_1}(\theta) < \varphi_{F_2}(\theta) \qquad \text{per qualche } \theta \in (0,1) \quad (2)$$

allora A_{F_2} può essere ottenuta a partire da A_{F_1} tramite trasferimenti dagli s/d più alti a quelli più bassi in **valore assoluto**. Con riferimento alle f.r. F_1 e F_2, ciò equivale a trasferimenti dalle classi estreme verso le classi centrali.
Quindi, se vale (2), in base al principio dei trasferimenti di Dalton, F_2 viene vista come *meno concentrata* di F_1.
Nella classe delle distribuzioni di Pareto in senso stretto, con esponente $\alpha > 1$, tale ordinamento parziale diventa totale ed è determinato da α, nel senso che la concentrazione diminuisce al crescere di α.

Un fatto analogo si manifesta, parzialmente, anche nella distribuzione a lungo termine degli s/d.

Per ogni coppia di economie che soddisfano $(H_1) - (H_2)$ *con* λ_i *in* $(-1/2, 0)$*, per* $i = 1, 2$*, con dato iniziale di Pareto in senso lato, la legge limite* $\mu_{\infty,i}$ *ha valore atteso finito* $(i = 1, 2)$ *e*

$$\varphi_{\mu_{\infty,1}}(\theta) \leq \varphi_{\mu_{\infty,2}}(\theta) \qquad \textit{se } \lambda_2 < \lambda_1$$

per ogni θ *in* $(0, \underline{\theta}) \cup (\overline{\theta}, 1)$*, per opportuni* $\underline{\theta}$*,* $\overline{\theta}$ *tali che* $0 < \underline{\theta} < \overline{\theta} < 1$*.*

Riassunto provvisorio

- $-1/2 < \lambda < 0$.
  (i) Risulta avverso (propenso) al rischio l'agente in deficit (surplus).
  (ii) La convergenza di μ_t, al divergere di t, si ha se e solo se l'esponente di Pareto del dato iniziale, α, soddisfa

  $$\alpha = 1 - 2\lambda$$

  dove λ è l'i.r.a.r. di ogni agente e, inoltre, il valore atteso di μ_0 è nullo. Ne discende che è paretiana in senso lato, e con lo stesso esponente α, anche la legge limite.
  Si noti che la concentrazione decresce al decrescere di λ.
- $0 \le \lambda < 1/2$.
  Tutto come prima, eliminando la condizione sul valore atteso di μ_0 (con $c_1 = c_2$ se $\lambda = 0$) e osservando che la concentrazione di μ_∞ è uniformemente più alta rispetto al caso precedente.

La condizione sul valore atteso si spiega se si pensa che gli s/d siano trasferibili e, complessivamente, possano bilanciarsi.
In effetti, se il dato iniziale è paretiano in senso lato con valore atteso > 0 (< 0), allora la massa unitaria scappa a $+\infty$ ($-\infty$).

Che cosa capita se $\alpha \neq 1 - 2\lambda$?

Se $\alpha < 1 - 2\lambda$, la massa unitaria scappa in parte a $-\infty$ e, in parte, a $+\infty$, avviando un processo che porterebbe alla scomparsa della classe media: la concentrazione iniziale sarebbe troppo alta per rimanere costante nel tempo.

Le classi medie cercheranno, prima o poi, di determinare interventi tendenti ad abbassare il livello di concentrazione (imposizione progressiva sul plusvalore) o, anche, a modificare la forma di τ in modo che, nel rispetto di $(H_1) - (H_2)$, la radice più piccola di $\mathcal{S}(p;\tau) = 0$ si sposti a sinistra rispetto all'originaria (aumento dell'i.r.a.r.).

Se $\alpha > 1 - 2\lambda$, μ_t tende a concentrarsi su un punto.
Poiché una situazione limite di questo tipo appare, da un punto di vista storico, irrealistica, alla luce delle considerazioni precedenti si dovrebbe inferire il compimento di azioni, esercitate al momento opportuno, tendenti a ridurre la progressività delle imposte sul plusvalore o a modificare τ al fine di abbassare l'i.r.a.r..

- Angle, J. (1986). *Social Forces* **65** 293-326.
- Arrow, K.J. (1965). Ristampa in *Essays in the theory of risk bearing* (1971).
- Atkinson, A.B. (1970). *Journal of Economic Theory* **2** 244-263.
- Bassetti, F., Ladelli, L. e Matthes, D. (2011). *Probab. Theory Related Fields* **150** 77-109.
- Champernowne, D.G. (1953). *The Economic Journal* **63** 318-351.
- Dalton, H. (1920). *The Economic Journal* **30** 348-361.
- de Finetti, B. (1952). *Giornale degli Economisti e Annali di Economia* **11** 685-709.
- Friedman, M. (1953). *Journal of Political Economy* **61** 277-290.

- GRAHAM, C. e MÉLÉARD, S. (1997). *Annals of Probability* **25** 115-132.
- KAC, M. (1956). *Proc. 3rd Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., 1954-1955*, **3**, ed. J. Neyman, University of California Press, 171-197.
- KANBUR, S.M. (1979). *Journal of Political Economy* **87** 769–797.
- MANDELBROT, B. (1960). *Internat. Econom. Rev.* **1** 79–106.
- PRATT, J. (1964). *Econometrica* **32** 132-136.
- ROTHSCHILD, M. e STIGLITZ, J.E. (1970-1972). *Journal of Economic Theory* **2**,**3**,**5**.
- STIGLITZ, J.E. (2015). NBER Working Papers 21189-21192.

Auguri a Patrizia, che se ne va,

e a Emanuele e Luca, che rimangono a farsi...