Funzioni di aggregazione e connessioni fra utilità multiattributo e affidabilità di sistemi

Fabio Spizzichino

Dipartimento di Matematica
Università "La Sapienza"

Università di Modena, Giugno 2015

Outline

- Premessa: *misure di capacità* e *funzioni di aggregazione*
- La letteratura sul concetto di *capacità* è vastissima, sia in Fisica che in Matematica e lo stesso termine viene usato con accezioni (matematiche) diverse
- Il termine *funzione di aggregazione*, al contrario, è uno dei vari termini usati per denotare uno stesso concetto matematico
- Entrambi i concetti sono connessi con delle estensioni della nozione di *copula*

- Obiettivo: Connessioni con diversi problemi, in diversi campi applicativi
- In particolare esamineremo due problematiche (fra quelle connesse con questioni probabilistiche)
  - Approccio target-based alla teoria dell'utilità (nel caso “multiattribute")
  - Affidabilità di sistemi

Consideriamo $(\Omega, \mathcal{F})$ spazio misurabile e $M : \mathcal{F} \to [0, 1]$ funzione di insieme

Definition

M misura di capacità (o *capacità*) se valgono le proprietà

- $M(\emptyset) = 0$
- $M(\Omega) = 1$ (*normalizzazione*)
- $A \subset B \Rightarrow M(A) \leq M(B)$ (*monotonia*)

Osservazioni 1

- Una misura di probabilità $\mathbb{P}$ è ovviamente una capacità
- Quando $\Omega = [n] \equiv \{1, ..., n\}$,

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = 2^{[n]} = \{0, 1\}^n$$

$M : \mathcal{F} \to [0, 1]$ si può anche vedere come

$$M : \{0, 1\}^n \to [0, 1]$$

Se M capacità allora viene anche detta *fuzzy measure*

Osservazioni 2

In molti casi, misure di capacità vengono create a partire da misure di probabilità, oppure da famiglie di misure di probabilità

- distorsions o trasformazioni monotone
- probabilità inferiori e superiori
- funzioni di beliefs, ...

Vedere ad esempio Molchanov (2005), Shafer (1976), Mesiar (lavori vari), Scarsini (1996), Coletti-Scozzafava-Vantaggi (lavori vari), Yager (lavori vari),.... e molti altri
Oppure ...

Misure di capacità (specialmente nel caso di fuzzy measures) emergono, con significati diversi, in svariati contesti applicativi

- Teoria dei giochi cooperativi
- Logistica e ricerca operativa, Teoria delle decisioni
- Politica
- Catene di Markov e teoria del potenziale discreto

Bibliografia di volume enorme ...

Vedere anche (per le prime voci) lavori vari di M. Grabisch, J.L. Marichal, ...

Copule 1

Come “oggetti matematici", le copule sono particolari funzioni $C : [0,1]^n \to [0,1]$ che possiamo guardare da tre diversi punti di vista:

- analitico (funzione monotona, con speciali proprietà)
- algebrico (operazione n-aria, con speciali proprietà)
- probabilistico (funzione di ripartizione n-dimensionale, con marginali uniformi su $[0,1]$)

Copule 2

Più precisamente
$C : [0,1]^n \to [0,1]$ è una copula se e solo se

- $$C(\mathbf{u}) = u_j$$
  quando $u_i = 1$ per $i \neq j$
- C monotona in ciascuna variabile
- C "monotona in n variabili"

Ciò implica

- C Lipschitz
- se $u_j = 0$, per qualche j
  $$C(\mathbf{u}) = 0$$

L'importanza dal punto di vista probabilistico è spiegata dal *Teorema di Sklar*

Theorem

Sia $F(x_1, ..., x_n)$ *funzione di ripartizione e* $G_1(x), ..., G_n(x)$ *le sue marginali*
Esiste (almeno) una copula C *tale che*

$$F(x_1, ..., x_n) = C(G_1(x_1), ..., G_n(x_n))$$

Se $G_1(x), ..., G_n(x)$ *sono continue* C *è unica*

Se $G_1(x), ..., G_n(x)$ sono anche invertibili (strettamente crescenti):

$$C(u_1, ..., u_n) = F\left(G_1^{-1}(u_1), ..., G_n^{-1}(u_n)\right)$$

Se F è la funzione di ripartizione congiunta di n variabili aleatorie $X_1, ...X_n$, allora C è detta

connecting copula di $X_1, ...X_n$

Ma anche altre copule possono essere associate in un modo naturale a $(X_1, ...X_n))$

Ad esempio, nel caso di v. a. non negative, la *copula di sopravvivenza* tale che

$$\begin{aligned}\overline{F}(x_1, ..., x_n) &:= \mathbb{P}\left(X_1 > x_1, ..., X_n > x_n\right) \\ &= \widehat{C}\left[\overline{G}_1\left(x_1\right), ..., \overline{G}_n\left(x_n\right)\right]\end{aligned}$$

con

$$\overline{G}_i\left(x\right) := \mathbb{P}\left(X_i > x\right)$$

funzioni di sopravvivenza marginali

Copule e dipendenza stocastica

- Il prodotto

$$C_{\Pi}(u_1, ..., u_n) = \prod_{j=1}^{n} u_j$$

  è una copula
- La connecting copula associata a n variabili aleatorie $X_1, ..., X_n$ coincide con C_{Π} se e solo se $X_1, ..., X_n$ sono indipendenti
- In generale la connecting copula associata a n variabili aleatorie $X_1, ..., X_n$ descrive il tipo di dipendenza stocastica fra di esse

Funzioni di Aggregazione

$M : [0,1]^n \to [0,1]$

Definition

M è una funzione di aggregazione se monotona non-decrescente in ciascuna variabile e t.c.

$$M(\mathbf{0}) = 0, M(\mathbf{1}) = 1$$

Osservazioni sulle FdA

- Quando consideriamo funzioni (a valori in $[0,1]$) definite su $\{0,1\}^n$, gli analoghi delle funzione di aggregazione sono le capacità su $[n]$ (Fuzzy Measures)
- Da ogni FdA M possiamo individuare una FM m considerandone la *restrizione su* $\{0,1\}^n$

Sia data una FM m.

Che cosa possiamo dire circa le FdA che ammettano m come restrizione?

Problema dell'estensione delle fuzzy measure:
Costruzione delle FdA M che estendono un'assegnata FM m
Un ruolo rilevante è giocato dalla Trasformata di Moebius della m

Definition

La *Trasformata di Moebius* di m è la funzione $\widehat{m} : \{0,1\}^n \rightarrow [0,1]$ definita dalle relazioni

$$\widehat{m}(I) = \sum_{K \subset I} (-1)^{|I-K|} m(K), \quad I \in \{0,1\}^n$$

Ricordiamo che la scrittura $I \in \{0,1\}^n$ è equivalente a $I \subset [n]$

Sia $\mathbf{x} \equiv (x_1, ..., x_n) \in [0,1]^n$ e , per $I \subset [n]$, poniamo

$$u_i = \begin{cases} x_i & \text{se } i \in I \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Poniamo inoltre

$$\mathbf{x}_I = (u_1, ..., u_n)$$

Consideriamo, per una funzione di aggregazione $A : [0,1]^n \to [0,1]$ e per $I \subset [n]$,

$$A(\mathbf{x}_I)$$

Per ogni $I \subset [n]$, $A(\mathbf{x}_I)$ è una $|I|$-copula:

copula della distribuzione marginale di X_I

Per m fuzzy measure e $A : [0,1]^n \to [0,1]$ funzione di aggregazione, consideriamo l'espressione

$$M(\mathbf{x}) = \sum_{I \subset [n]} \widehat{m}(I) A(\mathbf{x}_I)$$

In diversi casi interessanti:
$M(\mathbf{x})$ funzione di aggregazione, che estende la m
Esempio: *Integrale di Choquet* (di una fuzzy measure)

Domande

m e $A : [0,1]^n \to [0,1]$
m fuzzy measure A funzione di aggregazione

- a)
$$M_{m,A}(\mathbf{x}) := \sum_{I \subset [n]} \widehat{m}(I) A(\mathbf{x}_I)$$
è sempre una funzione di aggregazione, che estende la m?
- b) Nel caso particolare in cui A è una copula, che cosa esprime la $M_{m,A}$?

Risposta ad a) data dal seguente risultato (Kolesarova, Stupnanova, Beganova, 2012)

Sia $A : [0,1]^n \to [0,1]$ funzione di aggregazione, m fuzzy measure

Definition

A funzione di aggregazione con *zero annihilator* se

$$A(x_1, ..., x_n) = 0$$

quando qualcuno dei valori $x_1, ..., x_n$ è nullo

Theorem

$$M_{m,A}(\mathbf{x}) := \sum_{I \subset [n]} \widehat{m}(I) A(\mathbf{x}_I)$$

è un'estensione di m se e solo se A è una funzione di aggregazione con zero annihilator

Outline

Contesto:
$\mathcal{C}$ *insieme di conseguenze* (tipicamente $\mathcal{C} = \mathbb{R}$: quantità di denaro, etc ....)
$\mathcal{A}$ insieme di *azioni* (o *lotterie*)
Ogni azione $a \in \mathcal{A}$ dà luogo ad una distribuzione di probabilità su $\mathcal{C}$

$\preccurlyeq$ ordinamento sullo spazio $\mathcal{P}$ delle distribuzioni di probabilità P su $\mathcal{C}$ (*sistema di preferenze*)

Problema: Individuare l'azione (se esiste) che corrisponde alla P massimale o comunque scegliere un'azione soddisfacente

Definition

Funzione di Utilità $U : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ non decrescente

Per $x \in \mathcal{C}$, $U(x)$ misura l'utilità di ottenere con certezza la conseguenza $x \in \mathcal{C}$

Problemi di decisione semplificati quando esiste

U funzione di utilità *concordante con* $\preccurlyeq$

U funzione di utilità *concordante con* $\preccurlyeq$

quando

$$\mathrm{P}_1 \preccurlyeq \mathrm{P}_2$$

se e solo se

$$\int U(x)\,\mathrm{P}_1(dx) \leq \int U(x)\,\mathrm{P}_2(dx)$$

Sono note condizioni sul sistema di preferenze $\preccurlyeq$ sotto cui esiste U concordante (vedi ad esempio De Groot, *Optimal Statistical Decisions*, 1970)

Sia U funzione di utilità concordante con $\preccurlyeq$, allora

- anche $\widetilde{U}$ funzione di utilità concordante:

$$\widetilde{U}(x) = aU(x) + b,\, a, b \in \mathbb{R}$$

- Sia
  - X_1 la conseguenza (aleatoria) con distrib. di probabilità P_1 associata ad una decisione a_1
  - X_2 la conseguenza (aleatoria) con distrib. di probabilità P_2 associata ad una decisione a_2

  (X_1, X_2 *prospects*)

  Principio dell'Utilità Attesa: a_2 è preferita ad a_1 se e solo se

$$\mathbb{E}\left(U\left(X_1\right)\right) = \int U\left(x\right)\mathrm{P}_1(dx) \leq \int U\left(x\right)\mathrm{P}_2(dx) = \mathbb{E}\left(U\left(X_2\right)\right)$$

Fissiamo ora $C = \mathbb{R}$
Naturale assumere U continua, supponiamo anche U limitata:

Possiamo vedere U (tramite eventuale normalizzazione) come una funzione di ripartizione di una distribuzione di probabilità

Indichiamo con T una variabile aleatoria con distribuzione U e indipendente dai prospects

Per un prospect aleatorio X con distribuzione P

$$\mathbb{E}\left(U\left(X\right)\right) = \int U\left(x\right) \mathrm{P}(dx) = \int P\left(T \leq x\right) \mathrm{P}(dx) = P\left(T \leq X\right)$$

Quindi:

a_2 preferita ad a_1 se e solo se

$$\mathbb{E}\left(U\left(X_1\right)\right) = \mathbb{P}\left(T \leq X_1\right) \leq \mathbb{P}\left(T \leq X_2\right) = \mathbb{E}\left(U\left(X_2\right)\right)$$

Possiamo concludere (*Target-Based Approach*) che scegliere una funzione di utilità (limitata) equivale a scegliere un *target* T! (Castagnoli and Li Calzi, 1996), (Bordley and Li Calzi, 2000), ...

Impostazione utile per

- individuare funzioni di utilità (nel caso single-attribute)
- fornire significato probabilistico a diverse nozioni della teoria dell'utilità

Definition

Una funzione di utilità *Target-Based* è semplicemente una funzione di utilità limitata cioè una funzione di ripartizione di una variabile aleatoria scalare T!

Quale può essere un'appropriata definizione di funzione di utilità *Target-Based* nel caso *multi-attribute?*
Quale relazione con le funzioni di aggregazione e con le estensioni delle fuzzy measures?

Le funzioni di aggregazione sono ricorrenti nella letteratura sulle funzioni di utilità multi-attribute
e il problema dell'estensione da una fuzzy measure ad una funzione di aggregazione interviene in modo naturale.

Outline

Che cos'è una funzione di utilità nel caso di *n attributes*?

$U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - non decrescente in ogni argomento
tale che un prospect multivariato $\mathbf{X} \equiv (X_1, ..., X_n)$ (con distribuzione di probabilità $P_{\mathbf{X}}$) viene valutato attraverso l'integrale

$$\mathbb{E}(U(\mathbf{X})) = \int_{\mathbb{R}^n} (U(\mathbf{x}))\, P_{\mathbf{X}}(d\mathbf{x})$$

Che cosa è una funzione di utilità *target-based* nel caso di *n* attributes?

Prima risposta ingenua (copiata dal caso single-attribute):

U funzione di ripartizione congiunta di una n-upla di variabili aleatorie $T_1, ..., T_n$:

$$U(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(T_1 \leq x_1, ..., T_n \leq x_n)$$

In tal modo: **T** target multidimensionale e

$$\mathbb{E}(U(\mathbf{X})) = \mathbb{P}(T_1 \leq X_1, ..., T_n \leq X_n).$$

Ma è ragionevole tale definizione?

No: è troppo restrittiva. Infatti:

- a) le funzioni di ripart. congiunte di n-uple di v. a. costituiscono casi estremamente particolari fra tutte le FdU multi-attribute
- b) E' poco verosimile che un decisore sia tanto esigente da valutare un prospect $\mathbf{X}$ sulla base di un target multidimensionale $\mathbf{T}$ e della probabilità

$$\mathbb{P}\left(T_1 \leq X_1, \ldots, T_n \leq X_n\right)$$

("su ciascuna componente, il prospect deve superare il target")

Una definizione più realistica

Consideriamo

- un target n-dimensionale $\mathbf{T} \equiv (T_1, ..., T_n)$ con distribuzione congiunta $F_{\mathbf{T}}$
- una fuzzy measure $m : \{0,1\}^n \to [0,1]$ con il seguente significato:
  Per $I \subset [n] \equiv \{1, ..., n\}$,

  $m(I) =$ utilità, per il decisore, di acquisire un prospect deterministico $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ che superi il target sulle coordinate i (con $i \in I$) e non lo superi sulle coordinate j (con $j \notin I$)

Definition

U funzione di utilità target-based associata alla coppia $(m, F_{\mathbf{T}})$ *se*

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{I \subset [n]} m(I)\mathbb{P}\left(\left(\cap_{i \in I}(T_i \leq x_i)\right) \cap \left(\cap_{j \notin I}(T_j > x_j)\right)\right)$$

$$= \mathbb{E}\left[m\left(\{i | T_i \leq x_i\}\right)\right]$$

Scriveremo

$$U(\mathbf{x}) = U_{m,F_{\mathbf{T}}}(\mathbf{x})$$

Osservazione

La funzione di utilità

$$U(\mathbf{x}) = \mathbb{P}(T_1 \leq x_1, \ldots, T_n \leq x_n)$$

si ottiene come caso particolare, tramite la scelta

$$m(I) = \mathbf{1}_{\{I=[n]\}}$$

Applicando il principio di inclusione-esclusione, otteniamo

Proposition

$$U_{m,F_{\mathbf{T}}}(\mathbf{x}) = \sum_{I \subset [n]} \widehat{m}(I) \mathbb{P}(\mathbf{T}_I \leq \mathbf{x}_I)$$

$\widehat{m}$ trasformata di Moebius di m

$G_1(t), \ldots, G_n(t)$ distribuzioni marginali di $T_1, \ldots, T_n$

$G_1(t), \ldots, G_n(t)$ possono essere viste come utilità (target-based, single-attribute) per ogni singolo prospect X_i

Assumiamo $G_1(t), \ldots, G_n(t)$ continue e strettamente crescenti

Consideriamo la funzione di aggregazione $\widetilde{U}_{m,F_{\mathbf{T}}} : [0,1]^n \to [0,1]$

$$\widetilde{U}_{m,F_{\mathbf{T}}}(\mathbf{u}) := U_{m,F_{\mathbf{T}}}\left(G_1^{-1}(u_1), \ldots, G_n^{-1}(u_n)\right)$$

$\widetilde{U}_{m,F_{\mathbf{T}}}$ funzione di *aggregazione* delle *utilità marginali* $u_1, \ldots, u_n$

Proposition

$$\widetilde{U}_{m,F_{\mathbf{T}}}(\mathbf{u}) = \sum_{I \subset [n]} \widehat{m}(I) C_{\mathbf{T}}(\mathbf{u}_I)$$

C_T connecting copula di $\mathbf{T}$

Otteniamo quindi un'interpretazione economico-probabilistica dell'estensione di una fuzzy measure m, nel caso in cui la funzione di aggregazione A è una copula!

Outline

S sistema costituito da n componenti $C_1, ..., C_n$

Y_S stato del sistema (funzionante o guasto; up o down; 1 o 0; ....)

Y_i stato del componente C_i (funzionante o guasto; up o down; 1 o 0; ....)

Funzione di struttura

$$\phi : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$$

tale che

$$Y_S : \phi(Y_1, ..., Y_n)$$

Se S *coerente* allora ϕ fuzzy measure (ϕ monotona non decrescente)

Componenti indipendenti

$$\mathbb{P}(Y_S = 1) = \sum_{\mathbf{y}\in\{0,1\}^n} \phi(\mathbf{y})\,\mathbb{P}(\mathbf{Y} = \mathbf{y}) =$$

$$= \sum_{\mathbf{y}\in\{0,1\}^n} \phi(\mathbf{y}) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_i = y_i) =$$

$$\sum_{\mathbf{y}\in\{0,1\}^n} \phi(\mathbf{y}) \prod_{i=1}^{n} (y_i p_i + (1 - y_i)(1 - p_i))$$

Nel caso

$$\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \ldots = \mathbb{P}(Y_n = 1) = p$$

$$\mathbb{P}(Y_S = 1) = \sum_{\mathbf{y}\in\{0,1\}^n} \phi(\mathbf{y}) \prod_{i=1}^{n} (y_i p + (1 - y_i)(1 - p))$$

(Reliability polynomial)

Componenti non indipendenti

Per una struttura di dipendenza fissata fra gli eventi

$$(Y_1 = 1), \ldots, (Y_n = 1),$$

guardiamo a $\mathbb{P}(Y_S = 1)$ come ad una funzione

$$\mathbb{P}(Y_S = 1) = R(p_1, \ldots, p_n)$$

Ovviamente:

- $R : [0,1]^n \to [0,1]$
- R funzione di aggregazione
- R estensione della ϕ

Outline

I componenti, funzionanti al tempo $t_0 = 0$, vengono osservati allo scorrere del tempo. Poniamo

$$Y_i(t) := \mathbf{1}_{\{C_i \text{ funzionante al tempo } t\}}$$

$$Y_S(t) := \mathbf{1}_{\{S \text{ funzionante al tempo } t\}}$$

cosicchè

$$Y_S(t) = \phi(\mathbf{Y}(t))$$

Tempi di guasto dei componenti: per $i = 1, ..., n$

$$X_i := \inf\{t > 0 | Y_i(t) = 0\}$$

Tempo di guasto del sistema

$$X_S := \inf\{t > 0 | Y(t) = 0\}$$

Indichiamo con $\overline{G}_1, ..., \overline{G}_n$ le funzioni di sopravvivenza (marginali) dei tempi $X_1, ..., X_n$:

$$\overline{G}_i(t) = \mathbb{P}(X_i > t)$$

Concentriamo l'attenzione su $\overline{G}_{X_S}$

$$\overline{G}_{T_S}(t) := \mathbb{P}(X_S > t)$$

Ponendo, per $t > 0$ fissato,

$$\mathbf{X} := (X_1, ..., X_n)\,; \mathbf{t} := (t, ..., t)\,,$$

si ha

$$\overline{G}_{X_S}(t) = \sum_{I \subset [n]} \phi(I)\, \mathbb{P}(X_I > \mathbf{t}_I) \cap (X_{\tilde{I}} \leq \mathbf{t}_{\tilde{I}}) =$$

$$\sum_{B \subset [n]} \widehat{\phi}(B)\, \mathbb{P}(T_B > \mathbf{t}_B) =$$

$$\sum_{B \subset [n]} \widehat{\phi}(B)\, \widehat{C}\left(\mathbf{z}_B^{(t)}\right)$$

dove $\widehat{C}$ *copula di sopravvivenza* di $X_1, ..., X_n$ e

$$\mathbf{z}^{(t)} = \left(\overline{G}_1(t), ..., \overline{G}_n(t)\right)$$

Affidabilità e utilità target-based

La funzione di affidabilità, al tempo $t > 0$, del sistema S, in funzione delle affidabilità marginali $\overline{G}_1(t), \ldots, \overline{G}_n(t)$ dei componenti può essere vista come la funzione di aggregazione di utilità marginali in un problema di decisione con una funzione di utilità target-based in cui

- Vettore Target costituito da v.a. non negative
- La copula dei target coincide con la copula di sopravvivenza del vettore dei tempi di vita dei componenti di S
- Capacità ϕ, a valori in $\{0, 1\}$, coincide con la funzione di struttura di S

Si può passare al caso più generale con $\phi : \{0, 1\}^n \to [0, 1]$ considerando sistemi *multi-state* (i.e. non *binari*)

Qualche riferimento bibliografico

Molchanov, I. (2005). Theory of random sets. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag London, Ltd., London.

Kolesárová, A. Stupnanová, A. and Beganová, J. (2012). Aggregation- based extensions of fuzzy measures. Fuzzy Sets and Systems 194 , 1–14.

Dukhovny, A. and Marichal, J.-L. (2012) Reliability of systems with dependent components based on lattice polynomial description. Stoch. Models 28, no. 1, 167–184.

Scarsini, M. (1996). Copulae of capacities on product spaces. In Distributions with fixed marginals and related topics, 307–318. IMS Lecture Notes Monogr. Ser., 28, Inst. Math. Statist., Hayward, CA.

Durante, F., Foschi, R. and Sarkoci P. (2010). Distorted copulas: constructions and tail dependence. Comm. Statist. Theory Methods 39.

Durante, F. and S., F. (2010). Semi-copulas, capacities and families of level sets. Fuzzy Sets and Systems 161 , no. 2, 269–276.

Navarro J., and S., F. (2010). Comparisons of series and parallel systems with components sharing the same copula. Appl. Stochastic Models Bus. Ind., 26, 775-791.

Fantozzi F., and S., F. (2015). Multi-attribute utilities and extensions of fuzzy measures. Fuzzy Sets and Systems.