CORSO di LAUREA IN INGEGNERIA BIOMEDICA, ELETTRICA ELETTRONICA, ENERGETICA ed INFORMATICA

ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA B - FOGLIO 1

1) Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(4^{\lambda}-5)^n$$

al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$.

2) Determinare il carattere e l'eventuale somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{q-1}{q+2}\right)^n, \qquad q>0.$$

3) Determinare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{5^n+2n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{n+7}\left(\frac{1}{25}\right)^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+7}{n+2}\left(\frac{1}{3}\right)^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n+27}.$$

4) Determinare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+7}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+\sqrt{4n^2+4}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n-6^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sinh n}.$$

5) Utilizzando il criterio del rapporto, determinare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt{4^n+7^n}}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n!}.$$

6) Utilizzando il criterio della radice, determinare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\ln^n\left(\frac{2n+7}{n+25}\right), \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(15)^n}{3^{n^3}}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^{n!}}.$$

7) Studiare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3}], \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}\sin\frac{1}{n^{1/2}}.$$

8) Determinare l'insieme A costituito da tutti e soli gli $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ per cui converge almeno una delle due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}\left(\frac{x^2 + y^2}{36}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} \frac{1}{6^{n(1-(x-16)^2-y^2)}}.$$

9) Determinare l'insieme A costituito da tutti e soli gli $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ per cui convergono entrambe le serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{36}} 2^{n(x^2-y-36)}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} n^{y-|x|+5}.$$

10) Utilizzando il criterio del confronto, determinare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{n}}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n2^n + n^4}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n+2}.$$

11) Utilizzando il criterio della radice, determinare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\cosh n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n\left(1 + \frac{1}{n^2}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n}{n^n}.$$

12) Utilizzando il criterio del rapporto, determinare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n}{(n+1)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! + 5n}.$$

13) Utilizzando il criterio di Leibniz, dimostrare che le seguenti serie convergono

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \frac{\sin \frac{1}{n}}{n^2}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} (-)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1}.$$

CORSO di LAUREA IN INGEGNERIA BIOMEDICA, ELETTRICA ELETTRONICA, ENERGETICA ed INFORMATICA

ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA B - FOGLIO 2

1) Si consideri, per $\alpha \in \mathbf{R}$, la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{\alpha n^3}}{n} (\cos x)^{4n}.$$

Determinare l'insieme di convergenza per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ e calcolare la somma per $\alpha = 0$.

2) Dare lo sviluppo in serie di Mc-Laurin di

$$f(x) = \log(e - x) - \cos\sqrt{\alpha x} \qquad \alpha > 0$$

3) Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} [2 + (-1)^n]^n \frac{x^n}{n}.$$

Determinare l'insieme di convergenza e calcolare la somma della serie.

[**Sugg.**: Considerare separatamente gli indici pari e dispari e ricondursi a due serie note.]

4) Si consideri la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{n}{n+1} x^{\frac{n+1}{2}}.$$

Determinare gli insiemi di convergenza semplice e calcolare la somma della serie.

5) Detta $f_\lambda(x)$ la somma della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{\lambda - 2n}}{n!} \qquad \lambda \in \mathbf{R},$$

a) determinare $A = \{\lambda \in \mathbf{R} : \ \exists \ \text{finito} \ \int_1^{+\infty} f_\lambda(x) dx\}$;

b) dopo aver verificato che $\{\lambda = -3\} \in A$, calcolare il corrispondente integrale.

6) Si consideri la serie di potenze reale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n} \Big(1 + \frac{3^{n+1}}{(n-1)!}\Big).$$

Determinare l'insieme di convergenza e calcolarne la somma.

7) Si consideri la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}.$$

a) Calcolare la somma della serie delle derivate giustificando le operazioni compiute.

b) Determinare $f(0)$, $f'(0)$ e $f''(0)$ e dedurre da tali valori un grafico qualitativo di $f(x)$ in un intorno dell'origine.

8) Sia

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+3) \frac{x^{2n+5}}{(2n)!}.$$

Si calcoli $-S(\pi/2)$.

9) Sia

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \frac{(5y)^n - 1}{(5y) - 1}.$$

Si calcoli $f(1/7)$.

10) Detta $S(x)$ la funzione somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+5}}{n!(n+2)},$$

si calcoli $S(2)$.

11) Sia

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(n+2)}.$$

Calcolare $S(1/^2\sqrt{2})$, il raggio di convergenza e $D^{(3)}S(0)$.

12) Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 9^{n+1} (2n+2) \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbf{R}$. Determinare l'insieme I di convergenza della serie e calcolarne la somma $\forall x \in I$.

13) Per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$, determinare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 3^{n+1}}{(n+1)\,(n!)^{\alpha-1}}\, x^{2n+2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Nel caso $\alpha = 1$ calcolare, ove è definita, la somma della serie.

CORSO di LAUREA IN INGEGNERIA BIOMEDICA, ELETTRICA ELETTRONICA, ENERGETICA ed INFORMATICA

ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA B - FOGLIO 3

1) Data la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{|xy|}\,\dfrac{\sin^2(x+y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) studiare la continuità di f in $(0,0)$;
b) studiare l'esistenza delle derivate parziali di f in $(0,0)$.

2) Data la funzione $f : A \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ con $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ x^2+y^2 < 1\}$ e

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y \sinh x - x \sinh y}{\cosh[(x^2+y^2)^\alpha] - 1} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

determinare $\alpha > 0$ tale che $f \in C^0(A)$.

3) Si consideri per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ la funzione $f_\alpha : \{(x,y) : 0 < x^2+y^2 < 1/2\} \to \mathbf{R}$ così definita:

$$f_\alpha(x,y) = \frac{\ln[(1+x^2-y^2)^2] + 2y - \alpha x^2 + y^2}{\arctan x^2 + \sinh y^2}\,.$$

Dire se esiste un α tale che f_α ha limite nullo in $(0,0)$, e in caso affermativo calcolarlo.

4) Dire se esiste il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{1}{1+x+y^2} - 1 + x - x^2}{\sin x^2 + \sin y^2}$$

ed eventualmente calcolarlo.

5) Per ogni $a > 0$ si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3y^2[x^2+y^2]^{-a} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determinare per quali valori di a la funzione f è continua in $(0,0)$

6) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^4 \sin(2x^3) + x^{20} + x^{11} + 57, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Calcolare $f^{(61)}(0)$ e $f^{(23)}(0)$

7) Determinare e disegnare l'insieme naturale di definizione delle seguenti funzioni:

a) $f(x,y) = xy\ln(3xy)$.

b) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

c) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{\tan x}}{y}$.

d) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2-\frac{9}{4}}}{\cos(\pi x)}$.

8) Data la funzione $f(x,y) = e^{x+y}$, determinare le direzioni $\vec{v}$ uscenti dal punto $P(1,1)$ t.c. $D_{\vec{v}}f(1,1) = e^2$.

9) Calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni:

a) $f(x,y) = x^3y^3 + x\ln y$.

b) $g(x,y,z) = \sin(3yz+2x)$.

c) $h(x,y) = \arcsin\dfrac{y}{2x-y^2}$.

10) Data la funzione $f(x,y) = |(\tan x)(\tan y)|$, calcolare (se esistono) le derivate parziali rispetto a x e a y in $(1,0)$, $(0,-1)$, $(0,0)$.

11) Data la funzione $f(x,y) = x^3y + 3x - y^2$, trovare la derivata direzionale della f in $(1,1)$ lungo la direzione individuata da $\vec{v}(5,-2)$.

12) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin\frac{1}{2(x^2+y^2)}$.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(5xy)}{y}$.

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$.

13) Data $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2-\frac{9}{4}}}{\cos(\pi x)}$, calcolare $f_x(4,0)$, $f_y(4,0)$.

CORSO di LAUREA IN INGEGNERIA BIOMEDICA, ELETTRICA ELETTRONICA, ENERGETICA ed INFORMATICA

ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA B - FOGLIO 4

1) Scrivere l'equazione del piano tangente a $z = 2y^2 + 4xy - 3x^3$ in $(-1, 4)$.

2) Scrivere l'equazione della retta normale a $z = -2 \tan y$ in $(-2, \frac{\pi}{3})$.

3) Trovare i punti sulla superficie $z = 4x^2 + 3y^2 - 8x + 6y + 4$ dove il piano tangente è orizzontale.

4) Data la funzione

$$f(x, y) = \sin\left(\pi\sqrt{x + y}\right)$$

a) determinare il più grande sottoinsieme $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ in cui la f è definita.
b) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della f nel punto $(1, 0, f(1, 0))$.

5) Data la funzione $f(x, y) = y \sin x$, determinare le direzioni $\vec{v}$ uscenti dal punto $P(1, 1)$ t.c. $(D_{\vec{v}}f)_P = \dfrac{1}{2}$.

6) Data la funzione $z = \sin[\frac{\pi}{2}(x^3 + y^3 - xy)]$, scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie nel punto $P(1, 1, z(1, 1))$.

7) Si consideri la superficie grafico della funzione

$$z = 3x^2 + y^2 - 4y.$$

Costruire il piano tangente alla superficie nel punto $(1, 1, z(1, 1))$ e calcolare la distanza di $A(3, 3, 3)$ dal piano così determinato.

8) Sia data la funzione $z = 3x^2 + 4xy - 5y^2$ e il piano $z = 2x + 14y + 6$. Verificare che il piano è tangente alla superficie grafico di z in un opportuno punto P e calcolare la distanza di P dall'origine.

9) Data la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x, y) = y\sqrt[3]{x - 1} + x,$$

a) calcolare mediante la definizione $D_{\bar{v}}f(1, 0)$, dove $\bar{v}$ è il versore della retta di equazione $y = \sqrt{3}(x - 1)$ orientato nel verso delle x crescenti.

b) Dire in quali punti del dominio esistono le derivate parziali prime e calcolarle.

10) Sia $g(t) \in C^0(\mathbf{R})$ dispari e sia S la superficie, grafico della funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x, y) = \int_x^y g(t)\, dt.$$

Mostrare che $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ il piano tangente a S in $P(-\lambda, \lambda, f(-\lambda, \lambda))$ passa per l'origine.

11) Studiare continuità, derivabilità ed esistenza del piano tangente nell'origine della funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

CORSO di LAUREA IN INGEGNERIA BIOMEDICA, ELETTRICA ELETTRONICA, ENERGETICA ed INFORMATICA

ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA B - FOGLIO 5

1) Determinare quale delle seguenti serie è convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin e^n}{n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sinh n!}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-)^n \frac{n}{\ln^2 n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{n}{\cosh n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n^3 \ln^2(n+5)}.$$

2) Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze, studiando anche il comportamento agli estremi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n\, 6^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}(x-7)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\sqrt{\ln(n+2)}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (x+2)^n.$$

3) Calcolare la somma delle seguenti serie numeriche

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{4^n}{(2n)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^{2n+1}}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-)^{2n} \frac{7^{2n+1}}{(2n)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{4^{n+1}}{n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{3}{2}}{n} (\frac{16}{25})^n.$$

4) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x^4)}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 \qquad x = 0. \end{cases}$$

Detto $P_{12}(x)$ il polinomio di Mc-Laurin di ordine 12 della f, calcolare $P'_{12}(1)$.

5) Data la funzione di classe C^1 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = \sin(x^2y^3)\ln(1+7x^2y^6)$ ed il versore $\mathbf{v} = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, calcolare $D_{\mathbf{v}}f(1,1)$.

6) Data la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = \sin^2(x-y) + \cos^3(x+y)$, calcolare $f_{xy}(1,2) - f_{yx}(3,4)$.

7) Si consideri la superficie grafico della funzione

$$z = \frac{e^{x^2-y^3}}{1+x^2y^4}.$$

Costruire il piano tangente alla superficie nel punto $(2,1,z(2,1))$ e calcolare la distanza di $A(0,0,0)$ dal piano così determinato.

8) Data la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = x^2 - y^2$ ed il versore $\mathbf{v} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, calcolare $D_{\mathbf{v}}f(1,1)$ secondo la definizione.

CORSO di LAUREA IN INGEGNERIA BIOMEDICA, ELETTRICA ELETTRONICA, ENERGETICA ed INFORMATICA

ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA B - FOGLIO 6

1) Determinare gli eventuali estremi relativi della funzione

$$f(x,y) = e^{x^2-y^2}(x^4 - y^4).$$

2) Determinare massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x,y) = (x+y)(x-y)^2.$$

3) Data la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = y^2[(y+1)^2 - x^2]$ determinare gli eventuali punti di massimo e minimo locale ed assoluto di f in $\mathbf{R}^2$.

4) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = \exp(x+y)$, trovare e classificare gli eventuali punti stazionari di f.

5) Si determinino i punti di $\mathbf{R}^2$ in cui la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{\sinh^2(x) + \sin^2(y)}$$

assume i valori minimo e massimo.

6) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = \log(x^2 + y^2 + x + 1)$. Se esistono, determinare il massimo e il minimo assoluti di f in $\mathbf{R}^2$.

7) Determinare il polinomio di Taylor di ordine 4 nell'origine della funzione

$$f(x,y) = \left(\frac{\cos x}{1+y^2}\right)^6.$$

8) Sia $P_{14}(x,y)$ il polinomio di Taylor di ordine 14 centrato nell'origine della funzione

$$f(x,y) = \frac{(x^2y^2 - \sin(x^2y^2))\ln(1+x+y)}{1+y}.$$

Calcolare $P_{14}(1,2)$.

9) Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x,y) = (4x^2 + 9y^2 - 36)(x-2)^2$$

in $\mathbf{R}^2$.

10) Determinare eventuali massimi e minimi relativi della funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x,y) = y^2(x^2 + y^2 - 2x).$$

CORSO di LAUREA IN INGEGNERIA BIOMEDICA, ELETTRICA ELETTRONICA, ENERGETICA ed INFORMATICA

ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA B - FOGLIO 7

1) Data la funzione $f(x,y) = 7x^2 + 12y^2$, determinare il massimo ed il minimo assoluti nel dominio $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ x \le 0,\ y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 1\}$.

2) Determinare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y) = 1+3x+4y$ nel dominio $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ 0 \le y \le 4 - x,\ 0 \le x \le 4\}$.

3) Si consideri la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = 2x^3 + 3y^3$. Determinare massimo e minimo assoluti della f nel quadrato $Q = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$.

4) Si consideri la funzione $f(x,y) = 9x^2 + 4y^2$. Determinare massimo e minimo assoluti della funzione nel triangolo di vertici $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(0,5)$.

5) Si consideri l'insieme $Q = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ y \ge x^2,\ x \ge y^2\}$. Determinare massimo e minimo assoluto di $f(x,y) = (y - 3x + 1)^2$ in Q.

6) Dopo aver verificato che il problema è ben posto, determinare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y) = e^{3x^2+4y^2}$ nel dominio $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ \frac{x^2}{4} + y^2 \le 1\}$.

7) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int_D \sin(x+y)\, dxdy \qquad D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ 0 \le y \le 1,\ 1 - y \le x \le 1 + y\}.$$

8) Calcolare

$$\int_D x e^y\, dxdy.$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ 0 \le x \le 1,\ -x \le y \le 1 - x^2\}$.

9) Si consideri l'insieme $T = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ x \ge 1,\ y \le 2,\ \ln x \le y \le 1 + \ln x\}$. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_T \frac{1}{x\sqrt{1+y}}\, dxdy.$$

10) Calcolare

$$\int_D \frac{y}{x}\, dxdy$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ e \le x \le e^2,\ \sqrt[4]{\ln x} \le y \le \sqrt{\ln x}\}$.

11) Calcolare

$$\int_D xy\, dxdy \qquad D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ 0 \le x \le 1,\ x^2 - x \le y \le 1 - x^2\}.$$

CORSO di LAUREA IN INGEGNERIA BIOMEDICA, ELETTRICA ELETTRONICA, ENERGETICA ed INFORMATICA

ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA B - FOGLIO 8

1) Utilizzando le coordinate polari calcolare

$$\int_D (x^2+y^2)\, dxdy$$

dove D è il dominio in Figura 1

2) Utilizzando le coordinate polari, calcolare

$$\int_D 2xy\, dxdy$$

dove D è il dominio in Figura 2.

3) Calcolare

$$\int_D \frac{xy}{x^2+y^2}\, dxdy$$

dove D è il dominio in Figura 3.

4) Tralasciando l'integrazione più esterna, calcolare

$$\int_D \frac{x}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy$$

dove D è il dominio in Figura 4.

5) Utilizzando le coordinate polari, calcolare

$$\int_D \frac{y^2}{x^2+y^2}\, dxdy \qquad D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ 3 \le y \le 4, \ -y \le x \le y\}.$$

6) Utilizzando le coordinate polari, calcolare

$$\int_D (x^2+y^2)\, dxdy$$

dove D è il dominio in Figura 5.

7) Calcolare il seguente integrale triplo

$$\int_D z(x+y)\, dxdydz, \qquad D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : \ (x,y) \in T, \ -4 \le z \le 1\}$$

e T è il triangolo di vertici $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(1,0)$.

8) Calcolare l'integrale triplo

$$\int_D y\,dxdydz, \qquad D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 :\ 0 \le z \le 6 - (x^2+y^2)\}.$$

9) Calcolare il volume del solido Ω definito da

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 :\ (x,y) \in T,\ 0 \le z \le y+2\},$$

$$T = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ x \ge -1,\ y \ge 0,\ y \le 1,\ x+y-1 \le 0\}.$$

10) Calcolare

$$\int_D (1+x^2+y^2+z)\,dxdydz$$

dove D è la regione limitata dalle superfici $z=0$, $x^2+y^2=4$, $z=1+x^2+y^2$.

11) Sia $T = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 :\ 0 \le z \le x^2+y^2,\ x^2+y^2-2x \le 0\}$. Giustificando i passaggi, calcolare

$$\int_T \frac{xy}{\sqrt{|y|}}\,dxdydz.$$

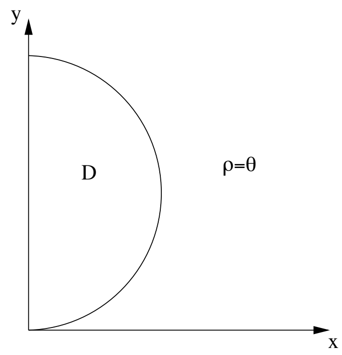

Figura 1

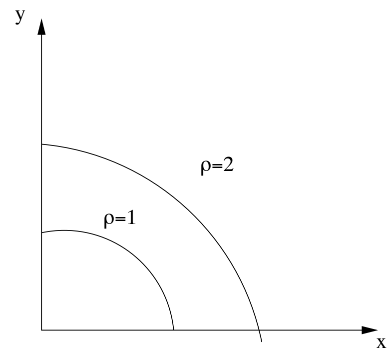

Figura 2

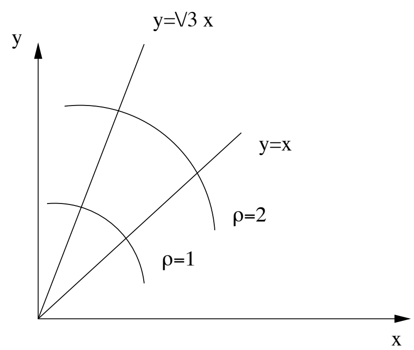

Figura 3

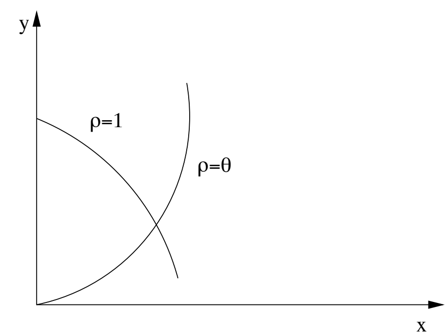

Figura 4

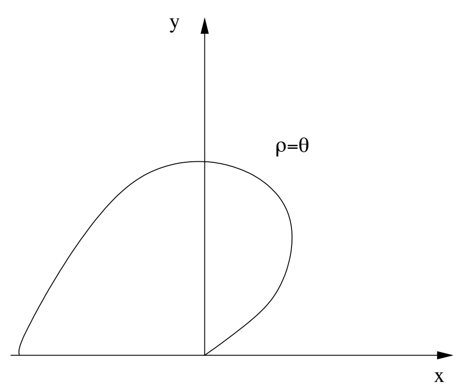

Figura 5

CORSO di LAUREA IN INGEGNERIA BIOMEDICA, ELETTRICA ELETTRONICA, ENERGETICA ed INFORMATICA

ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA B - FOGLIO 9

1) Posto $V = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 4x^2 + 3y^2 \leq z \leq 7 - 3x^2 - 4y^2\}$, si calcoli il flusso uscente dalla frontiera di V del campo vettoriale

$\mathbf{F}(x,y,z) = \big(xy^2 + \log(y^2 + z^2 + 1)\, ,\, \cos z - xy\, ,\, x^2 z + xz\big)$.

2) Si consideri il dominio $T = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 :\ y \leq 0,\ 0 \leq z \leq 4 - \sqrt{x^2+y^2}\}$ e il campo $\mathbf{v} = (0, y^2, 0)$.
Calcolare il flusso di $\mathbf{v}$ uscente dalla frontiera di T.

3) Posto

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 :\quad x^2 + y^2 \leq z^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq -2y,\ z \geq 0\}$$

calcolare il flusso del campo $\mathbf{v} = (0, -yz, 4x)$ uscente da T.

4) Sia T il toro ottenuto ruotando il cerchio del piano xz di centro $(2,0)$ e raggio 1 di un giro completo attorno all'asse z. Dato il campo $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definito da

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (\frac{x}{2}\sqrt{x^2+y^2}, \frac{y}{2}\sqrt{x^2+y^2}, 0),$$

calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ uscente dalla frontiera di T. [**NOTA: Difficile**]

5) Si consideri il dominio $\tau = \{(\varrho, \vartheta)\ :\ \vartheta \leq \varrho \leq \frac{\pi}{2}\, ,\, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\}$ e sia T la sua immagine nel piano xy.
Data la superficie Γ, grafico di $z = \exp\,(x^2 - y^2)$ con $(x,y) \in T$, calcolare il flusso di $\mathbf{F} = \Big(\frac{yz}{1+x^2+y^2}, \frac{xz}{1+x^2+y^2}, \frac{-1}{1+x^2+y^2}\Big)$ attraverso Γ.

6) Dato il campo vettoriale $\vec{\mathbf{F}}(x,y) = (x, \frac{x^3+y^2}{y})$, utilizzando il Teorema di Stokes calcolare $\int_\gamma < \vec{\mathbf{F}}, d\vec{\mathbf{r}} >$, dove γ è la linea in figura 1.

7) Dato il campo vettoriale $\vec{\mathbf{F}}(x,y) = (x^2 + y^2, x\ln(x+1))$, utilizzando il Teorema della divergenza, calcolare $\int_\gamma < \vec{\mathbf{F}}, \vec{\mathbf{n}}_e >\ ds$, dove γ è la linea orientata positivamente frontiera del dominio T in figura 2.

8) Dato il campo vettoriale $\vec{\mathbf{F}}(x,y) = (|x|, x^{4/3}y + y^2 + x)$, utilizzando il Teorema di Stokes calcolare $\int_\gamma < \vec{\mathbf{F}}, d\vec{\mathbf{r}} >$, dove γ è la linea in figura 3.

9) Dato il campo vettoriale $\vec{\mathbf{F}}(x,y) = (x^2, y^2)$, utilizzando il Teorema della divergenza, calcolare $\displaystyle\int_\gamma < \vec{\mathbf{F}}, \vec{\mathbf{n}}_e > ds$, dove γ è la linea orientata positivamente frontiera del dominio T in figura 4.

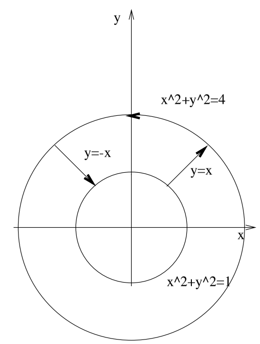

FIGURA 1

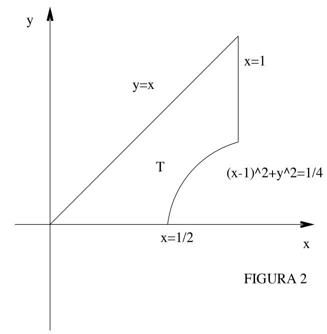

FIGURA 2

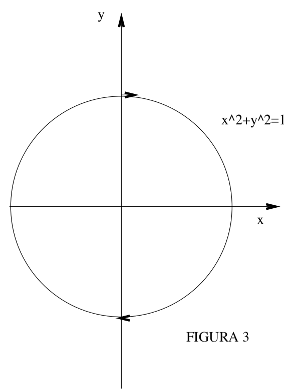

FIGURA 3

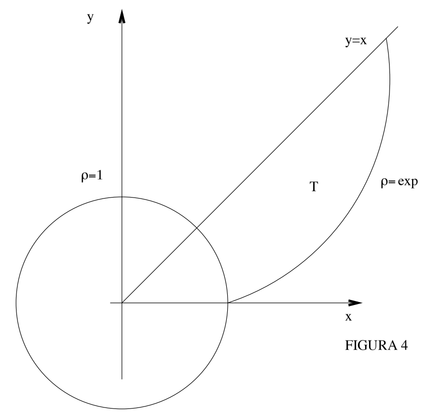

FIGURA 4