

Scale logaritmiche

Scala Logaritmica:

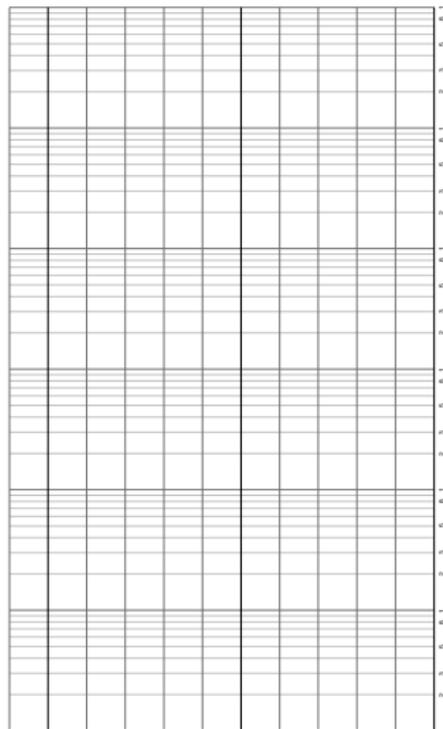
- sull'asse prescelto (ad esempio, l'asse x) si rappresenta il punto di ascissa $1 = 10^0$
- nella direzione positiva si rappresentano, a distanze uguali fra di loro, i punti di ascissa $10^1, 10^2, 10^3, \dots$
- nella direzione negativa si rappresentano, a distanze uguali fra di loro, i punti di ascissa $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots$
- i valori intermedi tra una potenza di 10 e la successiva (ad esempio, 2, 3, \dots , 9) sono posizionati in corrispondenza dei valori dei rispettivi logaritmi decimali



Applicazioni:

- rappresentare **misure positive** con ordini di grandezza molto diversi fra loro
- linearizzare funzioni esponenziali $y = K \cdot a^x$ (scale semilogaritmiche)
- linearizzare funzioni potenza $y = A \cdot x^b$ (scale doppiamente logaritmiche)

Carta semilogaritmica



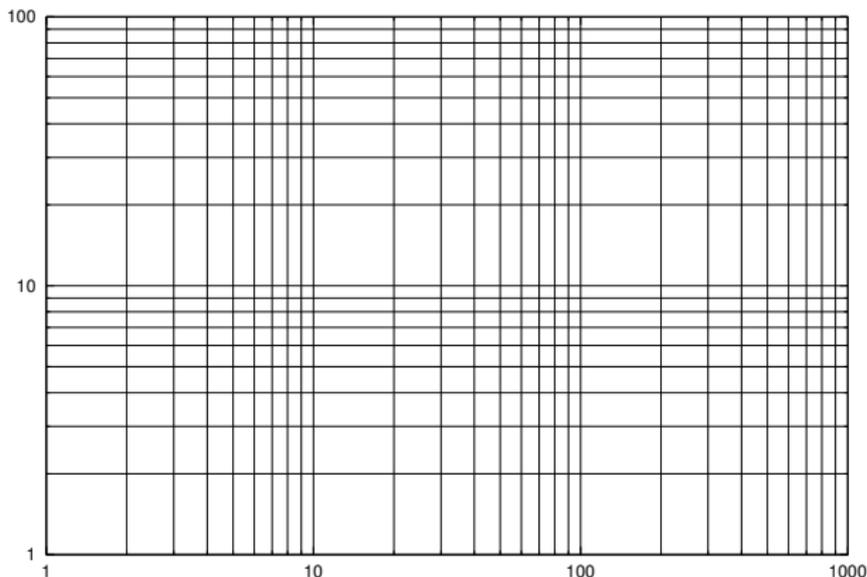
Carta semilogaritmica:

scala lineare sull'asse delle ascisse X e
scala logaritmica sull'asse delle ordina-
te Y (o viceversa)

Trasformazione di variabili:

$$X = x \quad Y = \log_{10} y$$

Carta doppiamente logaritmica



Carta doppiamente logaritmica: scala logaritmica sull'asse delle ascisse X e scala logaritmica sull'asse delle ordinate Y

Trasformazione di variabili: $X = \log_{10} x$ $Y = \log_{10} y$

Carte semilogaritmiche

Siano $K > 0$ e $a > 0$, $a \neq 1$. Data la funzione esponenziale

$$y = K \cdot a^x \quad \text{per } x \in \mathbb{R},$$

passando ai logaritmi decimali e utilizzando le proprietà dei logaritmi, si ottiene

$$\log_{10} y = \log_{10} (K \cdot a^x) \Rightarrow \log_{10} y = \log_{10} K + x \cdot \log_{10} a$$

Ponendo $X = x$ e $Y = \log_{10} y$, si ha

$$Y = \log_{10} K + X \cdot \log_{10} a,$$

che è l'equazione di una retta $y = mx + q$ con coefficiente angolare $m = \log_{10} a$ e intercetta $q = \log_{10} K$.

Carte doppiamente logaritmiche

Siano $K > 0$ e $b \in \mathbb{R}$. Data la funzione potenza

$$y = K \cdot x^b \quad \text{per } x > 0,$$

passando ai logaritmi decimali e utilizzando le proprietà dei logaritmi, si ottiene

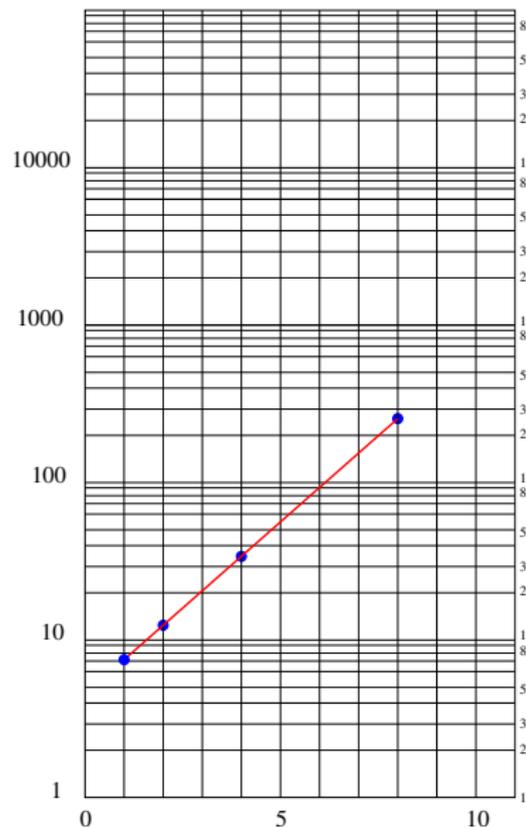
$$\log_{10} y = \log_{10} (K \cdot x^b) \Rightarrow \log_{10} y = \log_{10} K + b \cdot \log_{10} x$$

Ponendo $X = \log_{10} x$ e $Y = \log_{10} y$, si ha

$$Y = \log_{10} K + b \cdot X,$$

che è l'equazione di una retta $y = mx + q$ con coefficiente angolare $m = b$ e intercetta $q = \log_{10} K$.

Carta semilogaritmica – Esempio



Sono date le coordinate cartesiane di alcuni punti desunti da osservazioni sperimentali:

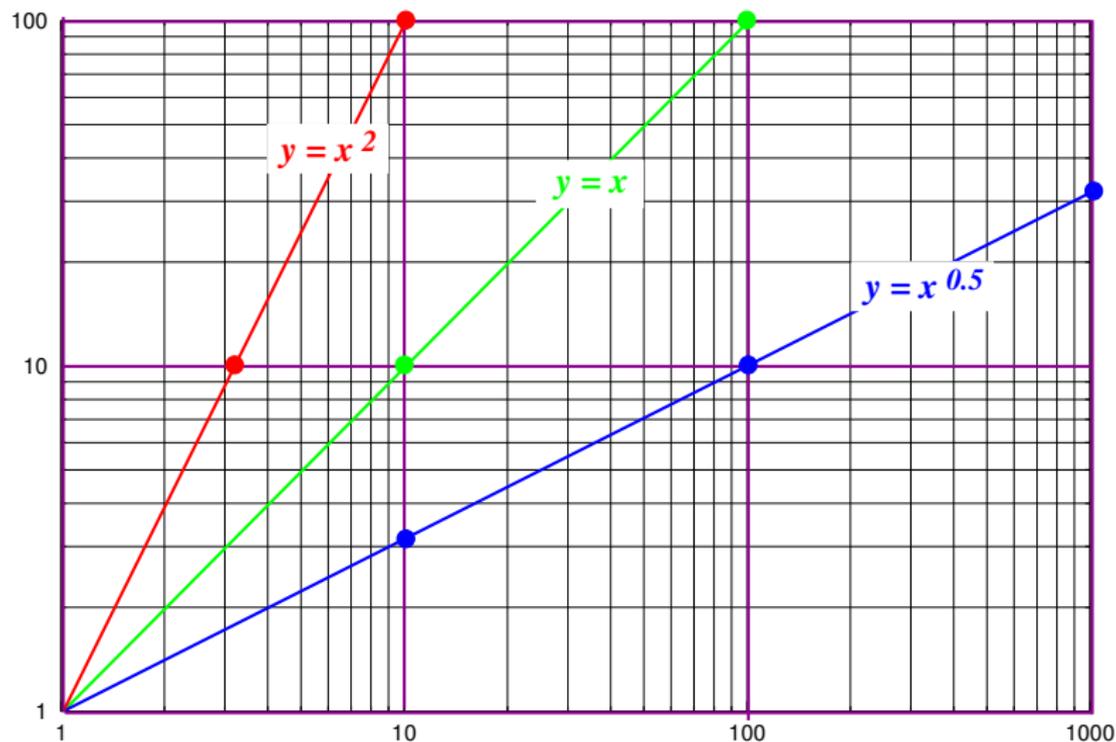
$$A = (1, 7.1) \quad B = (2, 12.1)$$

$$C = (4, 35) \quad D = (8, 288)$$

Rappresentando questi punti su una carta semilogaritmica, osserviamo che risultano praticamente allineati.

Quindi, questi punti appartengono al grafico di una funzione esponenziale

Carta doppiamente logaritmica – Esempio



Esercizio 1.

- (a) In un grafico con scala semilogaritmica è rappresentata la retta di equazione $Y = -\log_{10} 4 + (\log_{10} 5)X$. Trovare il legame funzionale tra x e y , dove $X = x$ e $Y = \log_{10} y$.
- (b) Trovare il coefficiente angolare della retta che rappresenta, su tale scala, la funzione $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Dire se tale coefficiente angolare è positivo o negativo.

Soluzione Esercizio 1:

- (a) Sostituendo le relazioni $X = x$ e $Y = \log_{10} y$ nell'equazione della retta, si ha:

$$\log_{10} y = -\log_{10} 4 + x \cdot \log_{10} 5 = \log_{10} 5^x - \log_{10} 4 = \log_{10} \frac{5^x}{4}$$

da cui $y = \frac{5^x}{4}$.

- (b) Prendendo i logaritmi di entrambi i membri si ha:

$$\log_{10} y = \log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^x = x \cdot \log_{10} \frac{1}{2}, \quad \text{da cui } Y = \left(\log_{10} \frac{1}{2}\right) \cdot X$$

quindi $m = -\log_{10} 2 < 0$.

Esercizio 2. In un grafico con scala doppiamente logaritmica (*scala logaritmica sia sull'asse delle ascisse che sull'asse delle ordinate*)

- (a) è rappresentata la retta di equazione $Y = -2X + 3$. Trovare il legame funzionale tra x e y , dove $X = \log_{10} x$ e $Y = \log_{10} y$;
- (b) scrivere l'equazione della retta che rappresenta su tale scala la funzione $y = (\sqrt{2x})^3$.

Soluzione Esercizio 2:

- (a) Sostituiamo le relazioni $X = \log_{10} x$ e $Y = \log_{10} y$ nell'equazione della retta. Otteniamo $\log_{10} y = -2 \log_{10} x + 3$, da cui

$$y = 10^{-2 \log_{10} x + 3} = 10^3 (10^{\log_{10} x})^{-2} = \frac{10^3}{x^2},$$

cioè, $y = \frac{1.000}{x^2}$.

- (b) Prendendo i logaritmi di entrambi i membri si ha:

$$\log_{10} y = \log_{10} (2x)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_{10} (2x),$$

quindi la retta è $Y = \frac{3}{2}X + \frac{3}{2} \log_{10} 2$.

Esercizio 3.

- (a) In un grafico in scala semilogaritmica è rappresentata la retta di equazione $Y = \log_{10} 2 + 3X$. Trovare il corrispondente legame funzionale tra x e y .
- (b) Rispondere alla stessa domanda nel caso in cui la stessa retta sia assegnata su carta doppiamente logaritmica.

Soluzione Esercizio 3:

(a) $\log_{10} y = \log_{10} 2 + 3x,$

da cui $y = 10^{\log_{10} 2 + 3x} = 2 \cdot 1000^x.$

(b) $\log_{10} y = \log_{10} 2 + 3 \log_{10} x = \log_{10}(2x^3),$

da cui $y = 2x^3.$

Esercizio 4.

- (a) Su carta semilogaritmica è assegnata la retta di equazione $Y = \log_{10} 3 + (\log_{10} 4)X$, dove $X = x$ e $Y = \log_{10} y$. Trovare il corrispondente legame funzionale tra x e y .
- (b) Si risponda alla stessa domanda nel caso che sia assegnata su carta doppiamente logaritmica la retta di equazione $Y = \log_{10} 5 + \frac{3}{2}X$, dove $X = \log_{10} x$ e $Y = \log_{10} y$.

Esercizio 4.

- (a) Su carta semilogaritmica è assegnata la retta di equazione $Y = \log_{10} 3 + (\log_{10} 4)X$, dove $X = x$ e $Y = \log_{10} y$. Trovare il corrispondente legame funzionale tra x e y .
- (b) Si risponda alla stessa domanda nel caso che sia assegnata su carta doppiamente logaritmica la retta di equazione $Y = \log_{10} 5 + \frac{3}{2}X$, dove $X = \log_{10} x$ e $Y = \log_{10} y$.

Soluzione:

(a) $y = 3 \cdot 4^x$ (b) $y = 5x^{\frac{3}{2}}$

Esercizio 5. In un grafico con scala semilogaritmica (*scala normale sull'asse delle ascisse e scala logaritmica sull'asse delle ordinate*)

- (a) è rappresentata la retta di equazione $Y = -\log_{10} 5 + (\log_{10} 2)X$.
Trovare il legame funzionale tra x e y , dove $X = x$ e $Y = \log_{10} y$;
- (b) trovare il coefficiente angolare della retta che rappresenta su tale scala la funzione $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$. Dire se tale coefficiente angolare è positivo o negativo.

Esercizio 5. In un grafico con scala semilogaritmica (*scala normale sull'asse delle ascisse e scala logaritmica sull'asse delle ordinate*)

- (a) è rappresentata la retta di equazione $Y = -\log_{10} 5 + (\log_{10} 2)X$.
Trovare il legame funzionale tra x e y , dove $X = x$ e $Y = \log_{10} y$;
- (b) trovare il coefficiente angolare della retta che rappresenta su tale scala la funzione $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$. Dire se tale coefficiente angolare è positivo o negativo.

Soluzione:

- (a) $y = \frac{2^x}{5}$ (b) Il coefficiente angolare è $\log_{10} \frac{3}{5} < 0$.

Esercizio 6.

- (a) Scegliendo le coordinate logaritmiche opportune (semilogaritmiche o doppiamente logaritmiche) scrivere la retta corrispondente alla funzione $y = \sqrt{2x^5}$.
- (b) In queste coordinate quale curva corrisponde alla retta di equazione $Y = -2X + 5$?

Esercizio 6.

- (a) Scegliendo le coordinate logaritmiche opportune (semilogaritmiche o doppiamente logaritmiche) scrivere la retta corrispondente alla funzione $y = \sqrt{2x^5}$.
- (b) In queste coordinate quale curva corrisponde alla retta di equazione $Y = -2X + 5$?

Soluzione:

- (a) Le coordinate opportune sono quelle doppiamente logaritmiche. La retta è $Y = \frac{1}{2} \log_{10} 2 + \frac{5}{2}X$.
- (b) $y = \frac{10^5}{x^2}$

Esercizio 7.

- (a) Scegliendo le coordinate logaritmiche opportune (semilogaritmiche o doppiamente logaritmiche) scrivere la retta corrispondente alla funzione $y = \frac{4}{10^{5x}}$.
- (b) In queste coordinate quale curva corrisponde alla retta di equazione $Y = 3 - 7X$?

Esercizio 7.

- (a) Scegliendo le coordinate logaritmiche opportune (semilogaritmiche o doppiamente logaritmiche) scrivere la retta corrispondente alla funzione $y = \frac{4}{10^{5x}}$.
- (b) In queste coordinate quale curva corrisponde alla retta di equazione $Y = 3 - 7X$?

Soluzione:

- (a) Le coordinate opportune sono quelle semilogaritmiche. La retta è $Y = \log_{10} 4 - 5X$.
- (b) $y = \frac{10^3}{10^{7x}}$