

Studio qualitativo del grafico di una funzione

Obiettivo: ottenere informazioni per descrivere qualitativamente l'andamento del grafico di una funzione f

- campo di esistenza (cioè, l'insieme di definizione)
- segno: per quali x si ha $f(x) \geq 0$?
- intersezioni con gli assi: $(0, f(0))$; per quali x si ha $f(x) = 0$
- comportamento agli estremi del campo di esistenza
- continuità
- monotonia
- massimi e minimi
- grafico qualitativo

Campo di esistenza

Il **campo di esistenza** è l'insieme di tutti i punti in cui la funzione è definita.

Nel caso di una funzione **composta** si determina, caso per caso, tenendo conto degli insiemi di definizione delle **funzioni base** con le quali la funzione è stata costruita.

Esempio: è data la funzione $f(x) = \frac{1}{\ln(4 - x^2)}$

- il logaritmo è definito per

$$4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 2)$$

- il denominatore deve essere diverso da zero

$$\ln(4 - x^2) \neq 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{3}$$

Il campo di esistenza di f è $(-2, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$.

Comportamento agli estremi

Se il campo di esistenza D è costituito dall'unione di più intervalli (limitati o illimitati), occorre prendere in considerazione separatamente gli estremi di ognuno di questi intervalli.

- Se gli estremi appartengono a D , si calcola semplicemente il valore della funzione in tali punti.

Esempi: $f(x) = \sqrt{x}$, $D = [0, +\infty)$, $f(0) = \sqrt{0} = 0$

$$f(x) = \sqrt{x(1-x)}, \quad D = [0, 1], \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 0$$

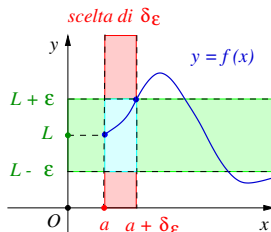
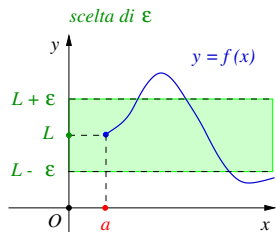
- Se gli estremi non appartengono a D , si introduce il concetto di **limite**.

Esempio: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Vogliamo calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$

Limite destro finito

Quando la variabile x assume valori “vicini” ad a (e maggiori di a), i corrispondenti valori di $f(x)$ si avvicinano sempre più al valore L .



limite destro finito

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

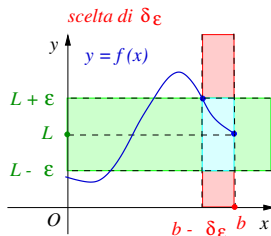
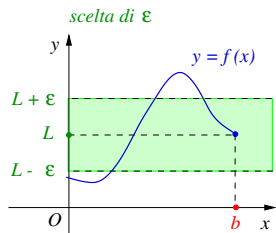
Si dice che $f(x)$ tende al limite L per x che tende ad a da destra se:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in (a, a + \delta_\varepsilon)$.

Esempi: (1) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$

Limite sinistro finito

Quando la variabile x assume valori “vicini” a b (e minori di b), i corrispondenti valori di $f(x)$ si avvicinano sempre più al valore L .



limite sinistro finito

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L$$

Si dice che $f(x)$ tende al limite L per x che tende a b da sinistra se:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in (b - \delta_\varepsilon, b)$.

Esempi: (1) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} = 0$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$

Limite finito per $x \rightarrow x_0$

Se la funzione possiede sia il limite destro che il limite sinistro nel punto x_0 e se entrambi sono uguali al valore L , si dice che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad \text{(limite finito)}$$

Quando la variabile x assume valori “vicini” a x_0 (diversi da x_0), i corrispondenti valori di $f(x)$ sono “vicini” al valore L .

Si dice che $f(x)$ tende al limite L per x che tende ad x_0 se:

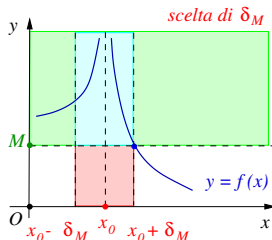
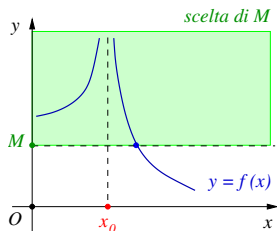
per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ per ogni } x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \text{ con } x \neq x_0.$$

Esempi: (1) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$ (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

Limite infinito

Quando la variabile x assume valori “vicini” ad x_0 (diversi da x_0), i corrispondenti valori di $f(x)$ crescono arbitrariamente.



limite infinito

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

Si dice che $f(x)$ tende a $+\infty$ per x che tende ad x_0 se:

per ogni $M > 0$ esiste un $\delta_M > 0$ tale che

$$f(x) > M \text{ per ogni } x \in (x_0 - \delta_M, x_0 + \delta_M) \text{ con } x \neq x_0.$$

Esempio:
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Osservazioni sui limiti per $x \rightarrow x_0$

Poiché nella definizione di limite si richiede $x \neq x_0$, non ha alcuna importanza l'eventuale valore assunto dalla funzione nel punto x_0 .

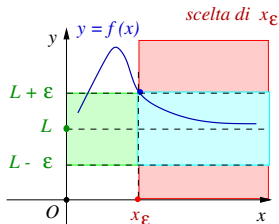
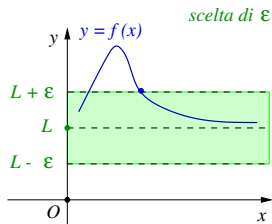
Esempi:

$$\bullet \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases} \quad f(0) = 1, \text{ ma } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\bullet \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases} \quad g(0) = 0, \text{ ma } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

Limite finito per $x \rightarrow +\infty$

Quando la variabile x cresce arbitrariamente, i corrispondenti valori di $f(x)$ sono sempre più “vicini” al valore L .



limite finito

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Si dice che $f(x)$ tende al limite L per x che tende ad $+\infty$ se:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $x_\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in (x_\varepsilon, +\infty)$.

Esempi: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$ (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

Il limite può non esistere

Il limite di una funzione può non esistere:

- $f(x) = \frac{|x|}{x}$, definita per $x \neq 0$. Non esiste il limite per $x \rightarrow 0$.

Infatti, il limite destro e limite sinistro esistono, ma sono diversi:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1.$$

- $f(x) = \frac{1}{x}$, definita per $x \neq 0$. Non esiste il limite per $x \rightarrow 0$.

Infatti, i limiti destro e sinistro sono infiniti di segno opposto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty.$$

- $f(x) = \sin x$. Non esiste il limite per $x \rightarrow +\infty$.

Alcuni limiti da ricordare

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ 0 & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \\ -\infty & \text{se } a > 1 \end{cases}$

Operazioni sui limiti

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \beta \in \mathbb{R}$, allora si ha:

- **somma:** $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \alpha + \beta$
- **prodotto:** $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \alpha \cdot \beta$
- **quoziente:** se $\beta \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$

Le stesse proprietà valgono nei casi $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ oppure $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$.

Operazioni sui limiti

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, allora si ha:

- **somma:** $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$

- **prodotto:** se $\alpha \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$

- **quoziente:** $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

In particolare, si ha che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = 0$

Le stesse proprietà valgono nei casi $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ oppure $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$.

Esercizio

Calcolare i seguenti limiti:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2\left(3 + \frac{1}{x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - e^{-x})$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - e^{-x}}{3 + \frac{1}{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{1}{x}\right)e^x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{e^x}$

Esercizio

Calcolare i seguenti limiti:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2\left(3 + \frac{1}{x}\right) = -6$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - e^{-x}) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - e^{-x}}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{2}{3}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{1}{x}\right)e^x = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{e^x} = 0$

Ampliamento di $\mathbb{R}$

Per $c \in \mathbb{R}$ definiamo le seguenti operazioni:

- $+\infty + c = +\infty, \quad -\infty + c = -\infty$

Questo significa che qualunque sia la funzione f che per $x \rightarrow x_0$ tende a $+\infty$, e qualunque sia la funzione g che per $x \rightarrow x_0$ tende a c , allora $f + g$ per $x \rightarrow x_0$ tende a $+\infty$. Analogamente per $-\infty$.

- $+\infty + \infty = +\infty, \quad -\infty - \infty = -\infty$

- $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty, \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

- $\frac{c}{\pm\infty} = 0$

- se inoltre $c \neq 0$,

$$(+\infty) \cdot c = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases} \quad (-\infty) \cdot c = \begin{cases} -\infty & \text{se } c > 0 \\ +\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

Operazioni sui limiti

Il limite della somma, differenza, prodotto, quoziente di due funzioni risulta rispettivamente uguale alla somma, differenza, prodotto, quoziente (se il denominatore è diverso da zero) dei due limiti, purché non sia una delle **forme indeterminate**.

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \beta \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, allora:

- **somma:** $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \alpha + \beta$ (tranne nel caso $+\infty - \infty$)
- **prodotto:** $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \alpha \cdot \beta$ (tranne nel caso $\pm\infty \cdot 0$)
- **quoziente:** $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ (tranne nei casi $\frac{0}{0}$ e $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)

Le stesse proprietà valgono nei casi $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ oppure $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$.

Forme indeterminate

Restano indeterminate le operazioni:

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}$$

Cosa significa per esempio che $\frac{0}{0}$ è una forma indeterminata?

Significa che se $f(x)$ e $g(x)$ tendono a 0 per $x \rightarrow x_0$, da questa unica informazione **NON** si può dedurre qual è il comportamento di $\frac{f(x)}{g(x)}$ al tendere di x a x_0 .

Esempio: consideriamo $f(x) = x$, $g(x) = x^3$, $h(x) = 2x$.

Si ha che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$. Tuttavia,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{f(x)} = 2.$$

Limite di un polinomio all'infinito

Il comportamento all'infinito di un polinomio è determinato dal termine di grado massimo.

Esempi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 - 2x^3 + x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^4 \cdot \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^4 = -\infty$$

Limite di una funzione razionale all'infinito

Dati due polinomi di grado m e n

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots b_1 x + b_0$$

si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n}$$

Esercizio

Calcolare i seguenti limiti:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 5x + 3}{7x^3 - x^2 + 11}$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 + 3}{x^5 - 3x^4 + 2x^2}$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 + 10x - 8}{x^2 + 3x + 8}$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} + 5e^x}{2e^{3x} - e^{2x} + 4}$

(si può risolvere ponendo $t = e^x$)

Esercizio

Calcolare i seguenti limiti:

- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 5x + 3}{7x^3 - x^2 + 11} = \frac{4}{7}$$

- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 + 3}{x^5 - 3x^4 + 2x^2} = 0$$

- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7 + 10x - 8}{x^2 + 3x + 8} = +\infty$$

- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} + 5e^x}{2e^{3x} - e^{2x} + 4} = \frac{1}{2}$$

(si può risolvere ponendo $t = e^x$)

Altri limiti fondamentali

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, a > 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^n} = 0 \quad \forall p, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n (\ln x)^p = 0 \quad \forall p, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Esercizio. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{5/2^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^9 \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

Altri limiti fondamentali

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, a > 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^n} = 0 \quad \forall p, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n (\ln x)^p = 0 \quad \forall p, n \in \mathbb{N} - \{0\}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Esercizio. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 2^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^9 \ln x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{e^t - 1}{t} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(x+1)}{x} \cdot \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

Funzioni continue

Sia I un intervallo aperto e sia $x_0 \in I$. Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **continua nel punto x_0** se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

cioè,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **continua nell'intervallo $[a, b]$** se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in (a, b), \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

Graficamente: una funzione definita **su un intervallo** è continua se è possibile disegnarne il grafico con un tratto *continuo*, senza staccare la penna dal foglio.

Funzioni continue – Operazioni

Dalle proprietà delle operazioni sui limiti segue che la **somma**, il **prodotto** e il **quoziente** di funzioni continue sono funzioni continue.

Se f e g sono continue in x_0 , si ha:

- $f + g$ è continua in x_0 , cioè, $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = f(x_0) + g(x_0)$.
- $f \cdot g$ è continua in x_0 , cioè, $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = f(x_0)g(x_0)$.
- se g è diversa da zero vicino a x_0 , $\frac{f}{g}$ è continua in x_0 , cioè,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Funzione inversa: se f è continua e invertibile, allora anche la *funzione inversa* f^{-1} è continua.

Funzioni continue – Esempi

Le seguenti funzioni sono **continue** nei rispettivi **campi di esistenza**:

1. la funzione valore assoluto $|x|$
2. le funzioni potenza ad esponente reale x^b
3. i polinomi $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$
4. le funzioni razionali (cioè, quozienti di due polinomi)
5. le funzioni esponenziali a^x e le loro inverse (le funzioni logaritmiche $\log_a x$)
6. le funzioni $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ e le loro inverse
7. ...

Esempio

Calcolare $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 + x^2 + 1}{x - 1}$.

La funzione $f(x) = \frac{3x^3 + x^2 + 1}{x - 1}$ è una funzione razionale fratta, quindi è continua in tutti i punti dove è definita, cioè in $\mathbb{R} - \{1\}$. Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 + x^2 + 1}{x - 1} = \frac{3 \cdot 2^3 + 2^2 + 1}{2 - 1} = 29.$$

Attenzione: NON usare la regola dei termini di grado massimo! La regola vale **solo** per il limite di una funzione razionale fratta per $x \rightarrow +\infty$ o per $x \rightarrow -\infty$!

Quanto vale invece $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 + x^2 + 1}{x - 1}$?

Limite di funzione composta

Siano f e g due funzioni per cui abbia senso $f \circ g$. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$$

e che f sia **continua** in L . Allora si ha che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right).$$

Limite di funzione composta

Siano f e g due funzioni per cui abbia senso $f \circ g$. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$$

e che f sia **continua** in L . Allora si ha che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right).$$

Esempi: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \ln 1 = 0$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x+1}{x}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+1}{x}} = \sqrt{4} = 2$

Continuità della funzione composta

Supponiamo che:

- g continua in x_0 , cioè, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$
- f continua in $y_0 = g(x_0)$, cioè, $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = f(y_0)$

Allora $f \circ g$ è continua in x_0 , cioè,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)).$$

Continuità della funzione composta

Supponiamo che:

- g continua in x_0 , cioè, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$
- f continua in $y_0 = g(x_0)$, cioè, $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = f(y_0)$

Allora $f \circ g$ è continua in x_0 , cioè,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)).$$

Esempi: le funzioni $f_1(x) = \sqrt[3]{7 + e^x}$, $f_2(x) = \log_{10}(9 + e^{1-x})$ sono continue dove sono definite. Pertanto, ad esempio,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{7 + e^x} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \log_{10}(9 + e^{1-x}) = 1$$

Esercizi sulle funzioni continue

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti funzioni sono continue in $\mathbb{R}$:

- $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{per } x \leq 1 \\ |x| + 2 & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

- $$g(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

- $$h(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. Determinare per quale valore del parametro k la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3x^3 + x + 2 - k & \text{per } x \leq 0 \\ \sqrt{x^4 + 1} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

è continua nel punto $x = 0$.

Esercizi sulle funzioni continue

Esercizio 2. Determinare per quale valore del parametro k la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3x^3 + x + 2 - k & \text{per } x \leq 0 \\ \sqrt{x^4 + 1} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

è continua nel punto $x = 0$.

Esercizio 3. Determinare per quale valore del parametro k la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^5 - 3k & \text{per } x < 1 \\ 2k e^{x-1} & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

è continua nel punto $x = 1$.

Esempi di discontinuità

Esempio 1. Il limite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ esiste ma è diverso da $f(0)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \quad f(0) = 1.$$

Esempio 2. I limiti $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ esistono ma sono diversi:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

Esempi di discontinuità

Esempio 3. I limiti $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ sono infiniti (e diversi):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Il Teorema di Weierstrass

Teorema di Weierstrass. Sia f una funzione definita e **continua** su un intervallo **chiuso** e **limitato** $[a, b]$. Allora esistono il massimo e il minimo assoluti di f in $[a, b]$.

Nota: le ipotesi sono tutte essenziali per la validità del teorema

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$ non ha minimo in $[-1, 1]$.

Infatti, la funzione non è *continua*.

- $f(x) = \frac{1}{x}$ non ha massimo in $(0, 1]$. Infatti, l'intervallo non è *chiuso*.
- $f(x) = e^x$ non ha minimo in $(-\infty, 0]$. Infatti, l'intervallo non è *limitato*.

Scrivere l'espressione esplicita di una funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che siano verificate contemporaneamente le seguenti proprietà:

- $f(0) = 0$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$.