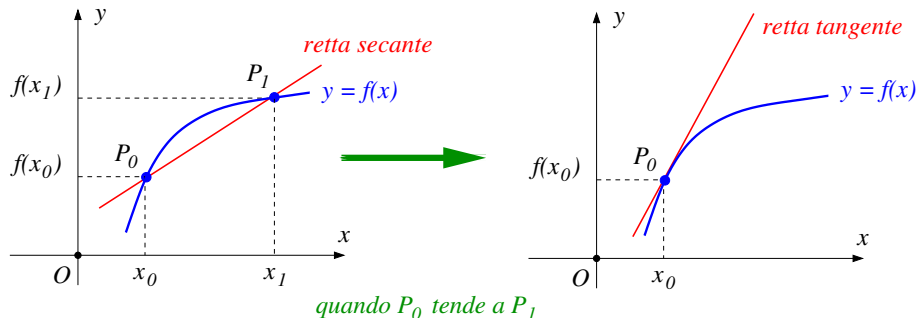


Retta tangente



Consideriamo una funzione continua f . Siano $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_1 = (x_1, f(x_1))$ due punti appartenenti al grafico della funzione.

Al tendere di x_1 a x_0 , il punto P_1 si avvicina al punto P_0 e la **retta secante** tende ad assumere una posizione limite, che prende il nome di **retta tangente** al grafico nel punto P_0 .

Retta tangente

L'equazione della **retta secante** per i due punti P_0, P_1 è data da

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0) + f(x_0).$$

Il **coefficiente angolare**

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

si chiama **rapporto incrementale** della funzione f nei punti x_0 e x_1 .

Se esiste **finito**, il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

rappresenta il coefficiente angolare della **retta tangente** di equazione:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Il valore $f'(x_0)$ è per definizione la **derivata prima** di f in x_0 .

Definizione di derivata

Se esiste finito il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

la funzione f si dice **derivabile in x_0** .

(Nel lucido precedente $h = x_1 - x_0$ e $x_1 = x_0 + h$).

Il valore del limite è per definizione la **derivata** di f nel punto x_0 .

La derivata si indica con le seguenti notazioni:

$$f'(x_0) \quad \frac{df}{dx}(x_0) \quad Df(x_0)$$

Calcolo di derivate – Esempi

Esempio 1: $f(x) = c$ funzione costante

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

Calcolo di derivate – Esempi

Esempio 1: $f(x) = c$ funzione costante

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

Esempio 2: $f(x) = mx + q$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(x+h) + q - mx - q}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{mh}{h} = m$$

Calcolo di derivate – Esempi

Esempio 1: $f(x) = c$ funzione costante

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

Esempio 2: $f(x) = mx + q$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(x+h) + q - mx - q}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{mh}{h} = m$$

Esempio 3: $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} = 2x$$

Calcolo di derivate – Esempi

Esempio 1: $f(x) = c$ funzione costante

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

Esempio 2: $f(x) = mx + q$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(x+h) + q - mx - q}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{mh}{h} = m$$

Esempio 3: $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} = 2x$$

Esempio 4: $f(x) = e^x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

Derivata come velocità istantanea

Un oggetto si muove lungo un percorso rettilineo. La sua posizione è una funzione del tempo: $s = s(t)$.

Velocità media nell'intervallo $[t_0, t_0 + h]$:

$$v_{\text{media}} = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

Velocità istantanea al tempo t_0 :

$$v_{\text{istantanea}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

Più h è vicino a 0, più piccolo è l'intervallo di tempo considerato e più precisa è l'informazione sull'andamento della velocità.

Derivata come velocità istantanea

Un oggetto si muove lungo un percorso rettilineo. La sua posizione è una funzione del tempo: $s = s(t)$.

Velocità media nell'intervallo $[t_0, t_0 + h]$:

$$v_{\text{media}} = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

Velocità istantanea al tempo t_0 :

$$v_{\text{istantanea}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

Più h è vicino a 0, più piccolo è l'intervallo di tempo considerato e più precisa è l'informazione sull'andamento della velocità.

Esempio. Sia $s(t) = s_0 + v \cdot t$ (moto rettilineo uniforme). Allora si ha:

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t + h) - s(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v \cdot h}{h} = v$$

Derivata come tasso di accrescimento

Nel processo di crescita di un organismo il peso corporeo è una funzione del tempo: $P = P(t)$.

$P(t_0)$ peso all'istante t_0

$P(t_0 + h)$ peso all'istante $t_0 + h$

$P(t_0 + h) - P(t_0)$ variazione di peso nell'intervallo $[t_0, t_0 + h]$

Tasso medio di accrescimento: è la variazione (media) nell'unità di tempo, cioè il rapporto

$$\frac{P(t_0 + h) - P(t_0)}{h}$$

Tasso di accrescimento all'istante t_0 : il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(t_0 + h) - P(t_0)}{h} = P'(t_0),$$

se esiste, fornisce il *tasso di accrescimento* in t_0 .

Operazioni con le derivate

Siano f, g due funzioni derivabili e $\alpha \in \mathbb{R}$.

- **Prodotto per una costante:** $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$
- **Somma:** $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- **Prodotto:** $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- **Quoziente:** $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Calcolo di alcune derivate

- $f(x) = x^3 = x \cdot x^2, \quad f'(x) = 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = 3x^2$

Iterando il procedimento: $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$, $f'(x) = n x^{n-1}$

- $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 10x - 7, \quad f'(x) = 15x^2 - 6x + 10$

- $f(x) = x^2 + e^x, \quad f'(x) = 2x + e^x$

- $f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = \frac{0 \cdot x - 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

Iterando il procedimento: $f(x) = \frac{1}{x^n}, \quad f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$

- $f(x) = \frac{x^5 + 2}{e^x}, \quad f'(x) = \frac{5x^4 e^x - (x^5 + 2) e^x}{e^{2x}}$

Derivata della funzione composta

Se g è una funzione derivabile in x e f è una funzione derivabile in $g(x)$, allora

$$(f \circ g)'(x) = \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Derivata della funzione composta

Se g è una funzione derivabile in x e f è una funzione derivabile in $g(x)$, allora

$$(f \circ g)'(x) = \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Esempi:

1. $h(x) = \frac{1}{x^4 + 5x^3 + 1}$, $h'(x) = -\frac{1}{(x^4 + 5x^3 + 1)^2} (4x^3 + 15x^2)$

2. $h(x) = (8x^3 - 6x^2)^{10}$, $h'(x) = 10(8x^3 - 6x^2)^9 (24x^2 - 12x)$

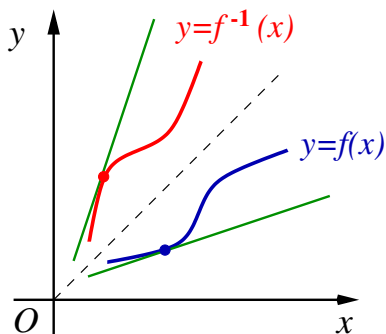
3. $h(x) = e^{x^3+2x}$, $h'(x) = (3x^2 + 2) e^{x^3+2x}$

Derivata della funzione inversa

Consideriamo una funzione f *invertibile* e *derivabile* con $f'(y) \neq 0$ (cioè, senza punti a tangente orizzontale).

La funzione inversa f^{-1} risulta *derivabile* e vale:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$



I grafici di f ed f^{-1} sono simmetrici rispetto a $y = x$.

Le rette tangenti hanno coefficienti angolari, uno il reciproco dell'altro.

Derivata della funzione inversa – Esempi

Esempio 1. $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $f(y) = y^2$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{[2y]_{y=\sqrt{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Esempio 2. $f^{-1}(x) = \ln x$, $f(y) = e^y$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{[e^y]_{y=\ln x}} = \frac{1}{x}$$

Derivate

Funzione $f(x)$	Derivata $f'(x)$	Ambito di validità
costante	0	
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}$ (se α non è intero, vale per $x > 0$)
e^x	e^x	
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$a > 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \cdot \log_a e$	$a > 0, x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

1. Date le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x - 1$,
- (a) dire quanto vale $f \circ g$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata;
 - (b) dire quanto vale $g \circ f$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata.

Esercizi

- 1.** Date le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x - 1$,
- (a)** dire quanto vale $f \circ g$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata;
 - (b)** dire quanto vale $g \circ f$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata.
- 2.** Date le funzioni $f(x) = 2x - 5$ e $g(x) = \ln(x + 2)$,
- (a)** dire quanto vale $f \circ g$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata;
 - (b)** dire quanto vale $g \circ f$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata.

Derivabilità e continuità

Derivabilità $\Rightarrow$ Continuità:

se f è derivabile in x_0 , allora f è continua in x_0 .

Infatti, per l'ipotesi di derivabilità $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Consideriamo l'uguaglianza:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \quad \text{per } x \neq x_0.$$

Passando al limite, si ricava la continuità in x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0).$$

Derivabilità e continuità

Derivabilità $\Rightarrow$ Continuità:

se f è derivabile in x_0 , allora f è continua in x_0 .

Infatti, per l'ipotesi di derivabilità $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Consideriamo l'uguaglianza:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \quad \text{per } x \neq x_0.$$

Passando al limite, si ricava la continuità in x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0).$$

Continuità $\nRightarrow$ Derivabilità:

1. $f(x) = |x|$ (punto angoloso)
2. $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$ (punto cuspidale)

Queste funzioni sono continue, ma non sono derivabili in $x = 0$.

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = \ln(2x + 1)$$

nel punto $x = 2$.

2. Calcolare il coefficiente angolare m della retta tangente al grafico della funzione

$$g(x) = \frac{\ln(x + 1)}{2x^2 + 3}$$

nel punto $x = 0$.

3. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

studiarne continuità e derivabilità.

4. Determinare i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + 2\beta - 1 & \text{per } x \geq 0 \\ (\beta + 1)e^x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in $x = 0$.

Criterio di monotonia

Criterio di monotonia:

se f è una funzione derivabile in (a, b) , si ha:

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è debolmente crescente in } (a, b)$$

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è debolmente decrescente in } (a, b)$$

Criterio di monotonia

Criterio di monotonia:

se f è una funzione derivabile in (a, b) , si ha:

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è debolmente crescente in } (a, b)$$

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è debolmente decrescente in } (a, b)$$

Nota: per quanto riguarda la *monotonia stretta* si può dimostrare che:

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longrightarrow \quad f \text{ è strettamente crescente in } (a, b)$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longrightarrow \quad f \text{ è strettamente decrescente in } (a, b)$$

MA non valgono le implicazioni inverse!! Basta considerare la funzione $f(x) = x^3$: è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, ma $f'(0) = 0$.

Criterio di monotonia

Esempi. Determinare gli intervalli in cui le seguenti funzioni risultano crescenti e quelli in cui risultano decrescenti:

- $f(x) = x^2$

Si ha che: $f'(x) = 2x \geq 0 \iff x \geq 0$.

Quindi, f è decrescente in $(-\infty, 0)$ ed è crescente in $(0, +\infty)$.

- $g(x) = (x^2 - 3)e^x$

Si ha che: $g'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x \geq 0 \iff x \leq -3$ oppure $x \geq 1$.

Quindi, g è decrescente in $(-3, 1)$ ed è crescente in $(-\infty, -3)$ e in $(1, +\infty)$.

Criterio di monotonia

Attenzione: quando si applica il criterio di monotonia, bisogna sempre tenere presente il **campo di esistenza** della funzione in considerazione.

Esempio. Studiare la monotonia della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

È sbagliato dire che f è strettamente decrescente in $\mathbb{R}$ perché f non è definita in tutto $\mathbb{R}$ (infatti, è definita solo per $x \neq 0$).

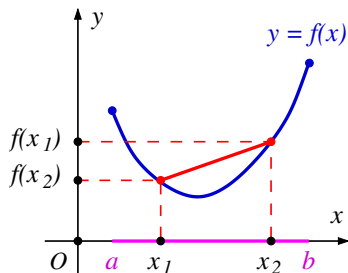
È sbagliato anche dire che f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Infatti, il criterio di monotonia vale solo sugli intervalli.

Ciò che si può dire è che f è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$ ed è strettamente decrescente nell'intervallo $(0, +\infty)$.

Studiare la monotonia delle seguenti funzioni:

- $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$
- $g(x) = \ln(x^2 - 2x)$
- $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

Funzioni concave e convesse



Una funzione f è **convessa** in (a, b) se

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$$

per ogni $x_1, x_2 \in (a, b)$ e per ogni $\lambda \in [0, 1]$. Cioè, presi comunque due punti sul grafico di f , il segmento che li congiunge sta *sopra* il grafico.

Una funzione f è **concava** in (a, b) se

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$$

per ogni $x_1, x_2 \in (a, b)$ e per ogni $\lambda \in [0, 1]$. Cioè, presi comunque due punti sul grafico di f , il segmento che li congiunge sta *sotto* il grafico.

Criterio di convessità

Criterio di convessità. Se f è una funzione derivabile due volte in (a, b) , si ha:

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ convessa in } (a, b)$$

$$f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ concava in } (a, b)$$

Criterio di convessità

Criterio di convessità. Se f è una funzione derivabile due volte in (a, b) , si ha:

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ convessa in } (a, b)$$

$$f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ concava in } (a, b)$$

Esempi. Determinare la convessità delle seguenti funzioni:

- $f(x) = x^2$

Si ha che: $f''(x) = 2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi, f è convessa in $\mathbb{R}$.

- $g(x) = e^{-x^2}$

Si ha che: $g''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ oppure } x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Quindi, g è concava in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ed è convessa in $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e in $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$.

Punti di massimo e minimo relativo

Punti di massimo e minimo relativo. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$.

x_0 si dice *punto di massimo relativo* se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

x_0 si dice *punto di minimo relativo* se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Teorema dei punti critici (Fermat). Sia f una funzione definita su un intervallo $[a, b]$ e sia x_0 un punto di massimo o di minimo relativo. Se $x_0 \in (a, b)$ e se f è derivabile in x_0 , allora $f'(x_0) = 0$.

Nota: i punti in cui si annulla la derivata prima (tra cui vanno ricercati gli eventuali punti di massimo o di minimo relativi interni), si dicono *stazionari* o *critici*.

Punti di massimo e minimo relativo

Punti di massimo e minimo relativo. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$.

x_0 si dice *punto di massimo relativo* se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

x_0 si dice *punto di minimo relativo* se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Teorema dei punti critici (Fermat). Sia f una funzione definita su un intervallo $[a, b]$ e sia x_0 un punto di massimo o di minimo relativo. Se $x_0 \in (a, b)$ e se f è derivabile in x_0 , allora $f'(x_0) = 0$.

Nota: i punti in cui si annulla la derivata prima (tra cui vanno ricercati gli eventuali punti di massimo o di minimo relativi interni), si dicono *stazionari* o *critici*.

Criterio della derivata seconda. Sia f una funzione derivabile due volte nell'intervallo (a, b) e sia x_0 un *punto critico*.

- Se $f''(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo relativo.
- Se $f''(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo relativo.

Studiare le seguenti funzioni:

(a) $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$

(b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

determinandone campo di esistenza, comportamento agli estremi, monotonia, eventuali punti di massimo e minimo, convessità, e tracciarne un grafico qualitativo.

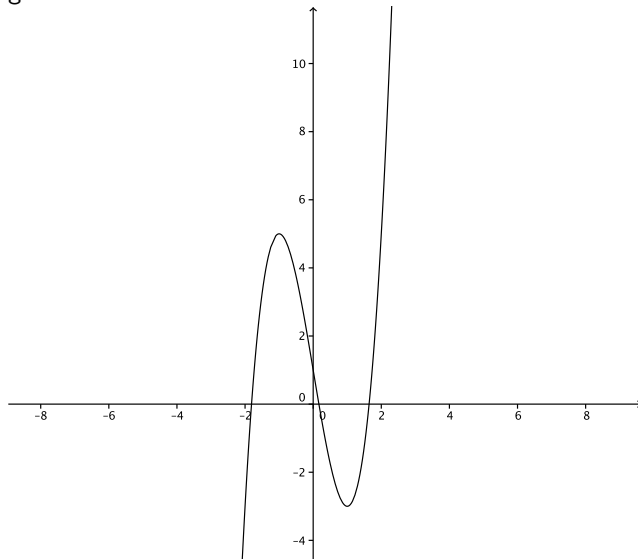
Esercizio

Soluzione (a): $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$

- campo di esistenza: $\mathbb{R}$
- comportamento agli estremi del dominio: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- monotonia: $f'(x) = 6x^2 - 6$
 f è strettamente crescente in $(-\infty, -1)$ e in $(1, +\infty)$
 f è strettamente decrescente in $(-1, 1)$
 $x = -1$ e $x = 1$ sono punti critici di f
- eventuali punti di massimo e minimo:
 $x = -1$ è un punto di massimo relativo, in cui f vale $f(-1) = 5$
 $x = 1$ è un punto di minimo relativo, in cui f vale $f(1) = -3$
- convessità: $f''(x) = 12x$
 f è convessa in $(0, +\infty)$; f è concava in $(-\infty, 0)$;
 $x = 0$ è un punto di flesso di f

Esercizio

- grafico:



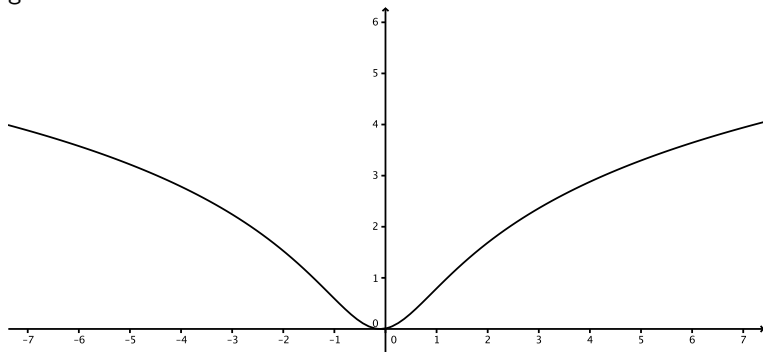
Esercizio

Soluzione (b): $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

- campo di esistenza: $\mathbb{R}$
- comportamento agli estremi del dominio: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- monotonia: $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$
 f è strettamente crescente in $(0, +\infty)$
 f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$
 $x = 0$ è un punto critico di f
- eventuali punti di massimo e minimo:
 $x = 0$ è un punto di minimo assoluto, in cui f vale $f(0) = 0$
- convessità: $f''(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$
 f è convessa in $(-1, 1)$, f è concava in $(-\infty, -1)$ e in $(1, +\infty)$
 $x = -1$ e $x = 1$ sono punti di flesso

Esercizio

- grafico:



Massimi e minimi assoluti di una funzione su $[a, b]$

Problema: determinare massimo e minimo assoluti di una funzione assegnata f su un intervallo dato $[a, b]$.

1. Stabilire se la funzione è continua. Se lo è, essa ha certamente massimo e minimo assoluti in $[a, b]$ (per il Teorema di Weierstrass).
2. Stabilire se la funzione è derivabile e trovare gli eventuali punti in cui non è derivabile.
3. I candidati punti di massimo di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ sono i seguenti:
 - gli estremi dell'intervallo: a, b ;
 - gli eventuali punti $z \in (a, b)$ in cui la funzione non è derivabile; indichiamo con A questo insieme;
 - gli eventuali punti $\bar{x} \in (a, b)$ in cui la funzione è derivabile e $f'(\bar{x}) = 0$; indichiamo con B tale insieme.

Massimi e minimi assoluti di una funzione su $[a, b]$

4. Il valore massimo (assoluto) è il massimo tra questi valori:

$$f(a), \quad f(b), \quad f(z) \text{ per } z \in A, \quad f(\bar{x}) \text{ per } \bar{x} \in B$$

5. I punti di massimo sono i valori di x tali che $f(x)$ è uguale al valore massimo.
6. Il valore massimo è unico. I punti di massimo non sono necessariamente unici.

Analogamente per i punti di minimo e il valore minimo.

Esercizio 1. Determinare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

nell'intervallo $[0, 2]$.

Esercizio 1. Determinare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

nell'intervallo $[0, 2]$.

Esercizio 2. Determinare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x) = \frac{2 - 2x}{x^2 + 3}$$

nell'intervallo $[-3, 0]$.

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{2+k-x} & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ x^2 + 2 & \text{se } 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

- Determinare per quale valore di k la funzione f è continua nel punto $x = 1$.
- Per tale valore di k la funzione f è derivabile nel punto $x = 1$?
- Per il valore di k per cui la funzione è continua, trovare i punti di massimo e minimo assoluti di f sul suo dominio di definizione, specificandone l'ascissa e l'ordinata.

Soluzione dell'Esercizio 3:

- $k = 1 + \ln 3$
- Per $k = 1 + \ln 3$ la funzione f non è derivabile nel punto $x = 1$.
- I candidati punti di massimo e minimo assoluti di f in $[-1, 3]$ sono gli estremi $x = -1$, $x = 3$ e il punto di non derivabilità $x = 1$ (non ci sono punti critici di f in $(-1, 3)$). Poiché $f(-1) = 3e^2$, $f(3) = 11$, $f(1) = 3$, concludiamo che il massimo assoluto di f in $[-1, 3]$ vale $3e^2$ ed è assunto in $x = -1$, mentre il minimo assoluto di f in $[-1, 3]$ vale 3 ed è assunto in $x = 1$. In altre parole, c'è un solo punto di massimo assoluto di coordinate $(-1, 3e^2)$ e un solo punto di minimo assoluto di coordinate $(1, 3)$.

Regola di de l'Hôpital

Teorema di de l'Hôpital. Siano f, g due funzioni derivabili nell'intervallo aperto (a, b) , escluso al più il punto x_0 , tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

e $g'(x) \neq 0$ per x vicino a x_0 . Se esiste il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Osservazione: il teorema continua a valere, con le dovute modifiche, anche per $x \rightarrow \pm\infty$ e per le forme indeterminate $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Regola di de l'Hôpital – Esempi

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)e^x = 1$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{5x^5} = 0$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

Osservazione: la regola di de l'Hôpital non sempre è risolutiva. Ad esempio:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dots$$

In questo caso basta osservare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1.$$

- Esercizio 1.** Date le funzioni $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ e $g(x) = 2x - 1$,
- (a) determinare il campo di esistenza di $f \circ g$ e scriverne l'espressione;
 - (b) determinare il campo di esistenza di $g \circ f$ e scriverne l'espressione;
 - (c) disegnare un grafico qualitativo di f , di g , di $f \circ g$ e di $g \circ f$.

- Esercizio 1.** Date le funzioni $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ e $g(x) = 2x - 1$,
- (a) determinare il campo di esistenza di $f \circ g$ e scriverne l'espressione;
 - (b) determinare il campo di esistenza di $g \circ f$ e scriverne l'espressione;
 - (c) disegnare un grafico qualitativo di f , di g , di $f \circ g$ e di $g \circ f$.
- Esercizio 2.** Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \ln |x|$ per $x \neq 0$.

Esercizio 3. Le lattine in alluminio per le bibite sono dei cilindri con volume V fissato a priori. Determinare l'altezza h e il raggio di base r della lattina che permette di ottenere il volume richiesto usando meno alluminio possibile.

Per una lattina della capienza di 0.33 litri, calcolare l'altezza e il raggio di base ottimali in centimetri, con arrotondamento alla seconda cifra decimale.

$$1 \text{ litro} = 1 \text{ dm}^3 = 10^3 \text{ cm}^3$$

Esercizio 3. Le lattine in alluminio per le bibite sono dei cilindri con volume V fissato a priori. Determinare l'altezza h e il raggio di base r della lattina che permette di ottenere il volume richiesto usando meno alluminio possibile.

Per una lattina della capienza di 0.33 litri, calcolare l'altezza e il raggio di base ottimali in centimetri, con arrotondamento alla seconda cifra decimale.

$$1 \text{ litro} = 1 \text{ dm}^3 = 10^3 \text{ cm}^3$$

Soluzione: $r = 3.75 \text{ cm}$, $h = 7.5 \text{ cm}$

Esercizio 4. Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Nota: questa funzione è detta **curva gaussiana** (o curva normale) standardizzata e ha un ruolo importante (che vedremo) in Statistica.

Esercizio 5. Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{4}{1 + e^{-x}} + 2.$$

Nota: le funzioni della forma

$$f(x) = \frac{a}{1 + e^{-k(x-x_0)}} + b$$

con $a > 0$, $k > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, sono dette **funzioni logistiche** e sono utili per descrivere fenomeni di saturazione.