Concentrazioni

Una **soluzione** è un sistema omogeneo prodotto dallo scioglimento di una sostanza solida, liquida o gassosa (il **soluto**), in un opportuno liquido (il **solvente**).

Definiamo concentrazione di una soluzione il rapporto tra la quantità di soluto e la quantità **totale** di soluzione (espresse nella stessa unità di misura):

$$C = \frac{\text{quantità di soluto}}{\text{quantità di soluzione}} \qquad \text{concentrazione}$$

Concentrazioni

Una **soluzione** è un sistema omogeneo prodotto dallo scioglimento di una sostanza solida, liquida o gassosa (il **soluto**), in un opportuno liquido (il **solvente**).

Definiamo concentrazione di una soluzione il rapporto tra la quantità di soluto e la quantità **totale** di soluzione (espresse nella stessa unità di misura):

$$C = \frac{\text{quantità di soluto}}{\text{quantità di soluzione}} \qquad \text{concentrazione}$$

Esempi: (g = grammi)

- Sciogliendo 25 g di sale in 100 g di acqua, si ottiene una soluzione con una concentrazione $C = \frac{25}{125} = 0.2$

Concentrazioni

Una **soluzione** è un sistema omogeneo prodotto dallo scioglimento di una sostanza solida, liquida o gassosa (il **soluto**), in un opportuno liquido (il **solvente**).

Definiamo concentrazione di una soluzione il rapporto tra la quantità di soluto e la quantità **totale** di soluzione (espresse nella stessa unità di misura):

$$C = \frac{\text{quantità di soluto}}{\text{quantità di soluzione}} \qquad \text{concentrazione}$$

Esempi: (g = grammi)

- Sciogliendo 25 g di sale in 100 g di acqua, si ottiene una soluzione con una concentrazione $C = \frac{25}{125} = 0.2$
- Su 75 g di soluzione sono presenti 9 g di soluto $\Rightarrow$ $C = \frac{9}{75} = 0.12$

Concentrazioni

Una **soluzione** è un sistema omogeneo prodotto dallo scioglimento di una sostanza solida, liquida o gassosa (il **soluto**), in un opportuno liquido (il **solvente**).

Definiamo concentrazione di una soluzione il rapporto tra la quantità di soluto e la quantità **totale** di soluzione (espresse nella stessa unità di misura):

$$C = \frac{\text{quantità di soluto}}{\text{quantità di soluzione}} \qquad \text{concentrazione}$$

Esempi: (g = grammi)

- Sciogliendo 25 g di sale in 100 g di acqua, si ottiene una soluzione con una concentrazione $C = \frac{25}{125} = 0.2$
- Su 75 g di soluzione sono presenti 9 g di soluto $\Rightarrow$ $C = \frac{9}{75} = 0.12$
- In 1000 g di soluzione, con concentrazione nota $C = 0.15$, sono presenti 150 g di soluto

Concentrazioni

- Il rapporto
$$C = \frac{\text{quantità soluto}}{\text{quantità soluzione}}$$
di due grandezze della stessa specie è un numero puro, cioè non dipende dall'unità di misura usata per valutare le due grandezze.

- La concentrazione C calcolata negli esempi precedenti non cambia misurando la quantità di soluto e solvente in Kg, libbre, ...

- Quando si ha a che fare col rapporto di grandezze omogenee, si usa esprimere questo rapporto in forma di percentuale.

  Si dice che le soluzioni degli esempi precedenti sono rispettivamente concentrate al 20%, al 12% e al 15%.

Concentrazioni

- Il rapporto
$$C = \frac{\text{quantità soluto}}{\text{quantità soluzione}}$$
di due grandezze della stessa specie è un numero puro, cioè non dipende dall'unità di misura usata per valutare le due grandezze.

- La concentrazione C calcolata negli esempi precedenti non cambia misurando la quantità di soluto e solvente in Kg, libbre, ...

- Quando si ha a che fare col rapporto di grandezze omogenee, si usa esprimere questo rapporto in forma di percentuale.

  Si dice che le soluzioni degli esempi precedenti sono rispettivamente concentrate al 20%, al 12% e al 15%.

Nella realtà:

- in chimica generale si utilizzano i g/L per preparare le soluzioni, ma spesso le concentrazioni sono espresse in moli/L

- per livelli molto bassi di concentrazione si usano unità di misura diverse (la concentrazione di un *inquinante* nel terreno si esprime ad esempio in mg/Kg): si usano le **parti per milione** (ppm)

Esercizio 1.

Aggiungendo 50 g di soluto a una soluzione al 5%, si ottiene una soluzione finale al 6%. Calcolare il peso iniziale della soluzione.

Esercizi sulle concentrazioni

Soluzione Esercizio 1: poniamo

$$x = \text{ peso iniziale della soluzione}$$

Allora si ha che

$$x + 50 = \text{ peso finale della soluzione}$$

mentre

$$\frac{5}{100}\,x = \text{ peso iniziale del soluto}, \qquad \frac{5}{100}\,x + 50 = \text{ peso finale del soluto}$$

La concentrazione finale è quindi data da

$$\frac{\frac{5}{100}\,x + 50}{x + 50} = \frac{6}{100}$$

Risolvendo questa equazione in x, si ottiene

$$\frac{5}{100}\,x + 50 = \frac{6}{100}(x + 50) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{100} = 47 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4700\,\mathrm{g}$$

Esercizio 2.

Aggiungendo 100 g di solvente a una soluzione al 5%, si ottiene una soluzione finale al 4%. Calcolare il peso iniziale della soluzione.

Esercizi sulle concentrazioni

Soluzione Esercizio 2: poniamo

$$x = \text{ peso iniziale della soluzione}$$

Allora si ha che

$$x + 100 = \text{ peso finale della soluzione}$$

mentre

$$\frac{5}{100}\,x = \text{ peso iniziale e finale del soluto}$$

La concentrazione finale è quindi data da

$$\frac{\frac{5}{100}\,x}{x+100} = \frac{4}{100}$$

Risolvendo questa equazione in x, si ottiene

$$\frac{5}{100}\,x = \frac{4}{100}\,(x+100) \quad \Leftrightarrow \quad x = 400\,\mathrm{g}$$

Esercizio 3.

a. Avendo 10 Kg di una soluzione al 30%, quanto solvente si deve aggiungere per ottenere una nuova soluzione al 20%?

b. Avendo 20 Kg di una soluzione al 10%, quanto soluto si deve aggiungere per ottenere una nuova soluzione al 20%?

Esercizi sulle concentrazioni

Soluzione Esercizio 3a: la prima soluzione contiene $\dfrac{30}{100} \cdot 10 \,=\, 3\,\text{Kg}$ di soluto. Per diminuirne la concentrazione si deve aggiungere una quantità x di solvente in modo tale che

$$\frac{3}{10+x} \,=\, \frac{20}{100} \quad \Leftrightarrow \quad 300 \,=\, 200 + 20\,x \quad \Leftrightarrow \quad x \,=\, 5\,\text{Kg}$$

Soluzione Esercizio 3b: la seconda soluzione contiene $\dfrac{10}{100} \cdot 20 \,=\, 2\,\text{Kg}$ di soluto. Per aumentarne la concentrazione si deve aggiungere una quantità y di soluto in modo tale che

$$\frac{2+y}{20+y} \,=\, \frac{20}{100} \quad \Leftrightarrow \quad 200 + 100\,y \,=\, 400 + 20\,y \quad \Leftrightarrow \quad y \,=\, 2.5\,\text{Kg}$$

Esercizio 4.

Sono date due soluzioni $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ composte dello stesso solvente e dello stesso soluto. La soluzione $\mathcal{S}_1$ è concentrata al 10%, mentre la soluzione $\mathcal{S}_2$ è concentrata al 15%. Quale è la concentrazione della soluzione ottenuta mescolando 5 Kg di $\mathcal{S}_1$ e 10 Kg di $\mathcal{S}_2$?

Soluzione Esercizio 4:

$$\frac{10}{100} \cdot 5 \;=\; 0.5\,\mathrm{Kg} \qquad \text{quantità di soluto in } \mathcal{S}_1$$

$$\frac{15}{100} \cdot 10 \;=\; 1.5\,\mathrm{Kg} \qquad \text{quantità di soluto in } \mathcal{S}_2$$

$$\frac{10}{100} \cdot 5 + \frac{15}{100} \cdot 10 \;=\; 2\,\mathrm{Kg} \qquad \text{quantità di soluto nella soluzione finale}$$

$$5 + 10 \;=\; 15\,\mathrm{Kg} \qquad \text{peso della soluzione finale}$$

La concentrazione finale è $\dfrac{2}{15} \approx 0.133\,.$

Espressa in percentuale, la concentrazione finale è del 13.3% circa.

Esercizio 5.

Sono date due soluzioni $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ dello stesso solvente e stesso soluto, $\mathcal{S}_1$ concentrata al 10% e $\mathcal{S}_2$ al 4%. Calcolare la concentrazione della soluzione ottenuta mescolando 6 parti di $\mathcal{S}_1$ e 3 parti di $\mathcal{S}_2$.

Soluzione Esercizio 5: (P = parti)

$$\frac{10}{100} \cdot 6 = 0.6\,\text{P} \qquad \text{quantità di soluto in } \mathcal{S}_1$$

$$\frac{4}{100} \cdot 3 = 0.12\,\text{P} \qquad \text{quantità di soluto in } \mathcal{S}_2$$

$$\frac{10}{100} \cdot 6 + \frac{4}{100} \cdot 3 = 0.72\,\text{P} \qquad \text{quantità di soluto nella soluzione finale}$$

$$6 + 3 = 9\,\text{P} \qquad \text{quantità totale di soluzione finale}$$

La concentrazione finale è

$$\frac{\frac{10}{100} \cdot 6 + \frac{4}{100} \cdot 3}{9} = \frac{10}{100} \cdot \frac{6}{9} + \frac{4}{100} \cdot \frac{3}{9} = 0.08\,.$$

Espressa in percentuale, la concentrazione finale è dell'8%.

Esercizio 6.

Sono date due soluzioni $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ dello stesso soluto e dello stesso solvente, la prima al 10% e la seconda al 20%. In quali percentuali occorre mescolarle per ottenere una soluzione al 12%?

Soluzione Esercizio 6: indichiamo con x la percentuale di $\mathcal{S}_1$. La percentuale di $\mathcal{S}_2$ è $100 - x$.

Si ha che

$$\frac{x}{100} \cdot \frac{10}{100} + \frac{100-x}{100} \cdot \frac{20}{100} = \frac{12}{100} \quad \Leftrightarrow \quad 10\,\frac{x}{100} + 20\left(1 - \frac{x}{100}\right) = 12$$

$$\Leftrightarrow \quad -10\,\frac{x}{100} = -8 \quad \Leftrightarrow \quad x = 80$$

Le percentuali sono: 80% della soluzione $\mathcal{S}_1$ e 20% della soluzione $\mathcal{S}_2$.

Esercizio 7.

Sono date due soluzioni $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ dello stesso soluto e dello stesso solvente, la prima al 10% e la seconda al 4%. In quale proporzione occorre mescolarle per ottenere una soluzione all'8%? Scrivere il risultato sotto forma di frazione con numeratore e denominatore interi.

Esercizi sulle concentrazioni

Soluzione Esercizio 7: indichiamo con P_1 e P_2 le quantità (ad esempio espresse in g) di $\mathcal{S}_1$ e di $\mathcal{S}_2$ da mescolare per ottenere la soluzione richiesta.

Siamo interessati a conoscere $\dfrac{P_1}{P_2}$.

La quantità di soluto contenuta in $\mathcal{S}_1$ è $\frac{10}{100}P_1$, mentre la quantità di soluto contenuta in $\mathcal{S}_2$ è $\frac{4}{100}P_2$.

Calcoliamo la concentrazione della soluzione che si ottiene mescolandole:

$$\frac{\frac{10}{100}P_1 + \frac{4}{100}P_2}{P_1 + P_2} = \frac{8}{100}$$

Da questa equazione otteniamo

$$10\frac{P_1}{P_2} + 4 = 8\Big(\frac{P_1}{P_2} + 1\Big) \quad \Leftrightarrow \quad 2\frac{P_1}{P_2} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P_1}{P_2} = 2$$

Esercizio 8.

Si dispone di una soluzione S_1 con concentrazione incognita e di una soluzione S_2, dello stesso soluto e dello stesso solvente, concentrata al 20%. Determinare la concentrazione incognita, sapendo che miscelando 2 parti di S_1 con 3 parti di S_2 si ottiene una soluzione concentrata al 30%.

Soluzione Esercizio 8: indichiamo con x la concentrazione incognita.
Si ha che

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{x}{100} + \frac{3}{5} \cdot \frac{20}{100} = \frac{30}{100}$$

da cui $x = 45$.

Esercizio 9. (prova d'esame del 10/09/2015)
Uno spritz Aperol viene preparato con 3 parti di prosecco, 2 parti di Aperol e 1 parte di acqua frizzante. Sapendo che la percentuale alcolica del prosecco è del 12% e quella dell'Aperol è dell'11%, calcolare la percentuale alcolica dello spritz (scrivere il risultato arrotondato alla seconda cifra decimale).

Esercizi sulle concentrazioni

Soluzione Esercizio 9: (P = parti)

$$\frac{12}{100} \cdot 3 = 0.36\,\mathrm{P}$$ quantità di alcool dovuta al prosecco

$$\frac{11}{100} \cdot 2 = 0.22\,\mathrm{P}$$ quantità di alcool dovuta all'Aperol

$$\frac{0}{100} \cdot 1 = 0\,\mathrm{P}$$ quantità di alcool dovuta all'acqua frizzante

$$0.36 + 0.22 + 0 = 0.58\,\mathrm{P}$$ quantità di alcool totale

$$3 + 2 + 1 = 6\,\mathrm{P}$$ quantità totale di spritz

La concentrazione alcolica dello spritz è quindi $\dfrac{0.58}{6} = 0.09\bar{6}$.

La percentuale alcolica, arrotondata alla seconda cifra decimale, è circa del 9.67%.

Cifre significative

La misura sperimentale di una grandezza è inevitabilmente approssimata a causa degli errori di osservazione, dei limiti della strumentazione, ecc.

Si utilizzano quindi notazioni del tipo

$$a = (12.35 \pm 0.01)\,\mathrm{m}$$

per indicare che la misura di a è affetta da una incertezza di $1\,\mathrm{cm}$.

Cifre significative: si esprime una misura sperimentale (o in generale affetta da errori) riportando solo le cifre sicure e la prima cifra incerta.

Ad esempio, scriviamo:

$$a \approx 12.35\,\mathrm{m} \qquad \text{rappresentazione con 2 cifre significative}$$

Troncamento e arrotondamento

Troncamento: si trascurano le cifre decimali che non interessano.
Ad esempio,

$$\pi = 3.141592653\ldots \quad \to \quad \pi \approx 3.14 \qquad \text{(con 2 cifre decimali)}$$

$$\to \quad \pi \approx 3.1415 \quad \text{(con 4 cifre decimali)}$$

$$e = 2.71828\ldots \quad \to \quad e \approx 2.71 \quad \text{(con 2 cifre decimali)}$$

Arrotondamento: si prende la migliore approssimazione con numero di cifre decimali fissato.
Ad esempio,

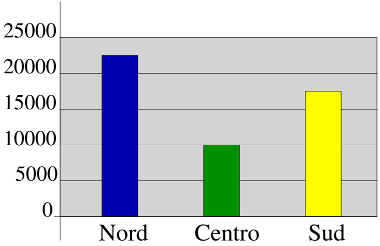
$$\pi = 3.141592653\ldots \quad \to \quad \pi \approx 3.14 \qquad \text{(con 2 cifre decimali)}$$

$$\to \quad \pi \approx 3.1416 \quad \text{(con 4 cifre decimali)}$$

$$e = 2.71828\ldots \quad \to \quad e \approx 2.72 \quad \text{(con 2 cifre decimali)}$$

Esercizio 1. La popolazione di una nazione risulta geograficamente distribuita come in tabella (dati in migliaia di abitanti):

area	abitanti	%
Nord	22600	
Centro	10000	
Sud	17400	
totale	50000	



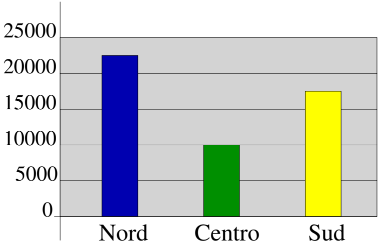
(istogramma: aree dei rettangoli proporzionali al numero di abitanti)

a) Esprimere gli abitanti delle varie aree geografiche, in forma percentuale, arrotondata a un numero intero.

Esercizi sulle percentuali

Esercizio 1. La popolazione di una nazione risulta geograficamente distribuita come in tabella (dati in migliaia di abitanti):

area	abitanti	%
Nord	22600	45
Centro	10000	20
Sud	17400	35
totale	50000	100



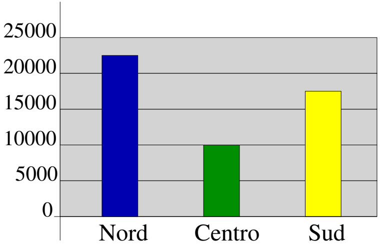
(istogramma: aree dei rettangoli proporzionali al numero di abitanti)

a) Esprimere gli abitanti delle varie aree geografiche, in forma percentuale, arrotondata a un numero intero.

Esercizi sulle percentuali

Esercizio 1. La popolazione di una nazione risulta geograficamente distribuita come in tabella (dati in migliaia di abitanti):

area	abitanti	%
Nord	22600	45
Centro	10000	20
Sud	17400	35
totale	50000	100



(istogramma: aree dei rettangoli proporzionali al numero di abitanti)

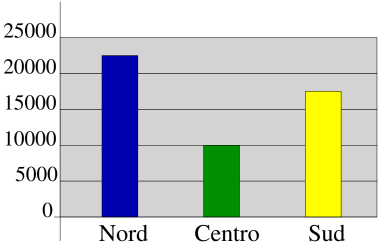
a) Esprimere gli abitanti delle varie aree geografiche, in forma percentuale, arrotondata a un numero intero.

b) La **prevalenza** di una malattia è la percentuale di individui che sono affetti da tale malattia. Sapendo che una certa malattia ha una prevalenza dell'1% al nord, del 2% al sud ed è inesistente al centro, calcolarne la prevalenza sul totale della popolazione, arrotondata alla seconda cifra decimale.

Esercizi sulle percentuali

Esercizio 1. La popolazione di una nazione risulta geograficamente distribuita come in tabella (dati in migliaia di abitanti):

area	abitanti	%
Nord	22600	45
Centro	10000	20
Sud	17400	35
totale	50000	100



(istogramma: aree dei rettangoli proporzionali al numero di abitanti)

a) Esprimere gli abitanti delle varie aree geografiche, in forma percentuale, arrotondata a un numero intero.

b) La **prevalenza** di una malattia è la percentuale di individui che sono affetti da tale malattia. Sapendo che una certa malattia ha una prevalenza dell'1% al nord, del 2% al sud ed è inesistente al centro, calcolarne la prevalenza sul totale della popolazione, arrotondata alla seconda cifra decimale.
Soluzione: 1.15%

Esercizi sulle percentuali

Esercizio 2. Una ditta è composta da 50 filiali. Nell'ultimo anno, il 40% delle filiali ha maturato un saldo attivo di 100.000 Euro per ciascuna filiale, il 30% ha maturato un saldo attivo di 50.000 Euro per filiale e le restanti hanno riportato un passivo di 60.000 Euro per filiale. Qual è il saldo complessivo della ditta?

Esercizio 2. Una ditta è composta da 50 filiali. Nell'ultimo anno, il 40% delle filiali ha maturato un saldo attivo di 100.000 Euro per ciascuna filiale, il 30% ha maturato un saldo attivo di 50.000 Euro per filiale e le restanti hanno riportato un passivo di 60.000 Euro per filiale. Qual è il saldo complessivo della ditta?

Soluzione:

saldo complessivo
$= 0.4 \cdot 50 \cdot 100.000 + 0.3 \cdot 50 \cdot 50.000 - 0.3 \cdot 50 \cdot 60.000 \;=\; 1.850.000\,\text{Euro}$

Esercizio 3. Un'epidemia di influenza colpisce il 40% dei bambini che non hanno ancora compiuto dieci anni e il 10% delle persone di età maggiore o uguale di dieci anni. Sapendo che si è ammalato di influenza il 20% della popolazione, calcolare la percentuale dei bambini al di sotto dei dieci anni rispetto all'intera popolazione ed esprimere il risultato sotto forma di frazione e di percentuale con una cifra decimale arrotondata.

Esercizi sulle percentuali

Esercizio 3. Un'epidemia di influenza colpisce il 40% dei bambini che non hanno ancora compiuto dieci anni e il 10% delle persone di età maggiore o uguale di dieci anni. Sapendo che si è ammalato di influenza il 20% della popolazione, calcolare la percentuale dei bambini al di sotto dei dieci anni rispetto all'intera popolazione ed esprimere il risultato sotto forma di frazione e di percentuale con una cifra decimale arrotondata.

Soluzione:

Indichiamo con x la percentuale dei bambini di età minore di dieci anni. Si ha che

$$\frac{40}{100} \cdot \frac{x}{100} + \frac{10}{100} \cdot \frac{100 - x}{100} = \frac{20}{100} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1000}{30},$$

cioè la percentuale dei bambini al di sotto dei dieci anni rispetto all'intera popolazione è il 33.3%.

Esercizio 4. Un titolo finanziario dà il 3% lordo di interesse annuo. Tali interessi sono tassati al 27%. Calcolare il rendimento netto del titolo.

Esercizio 4. Un titolo finanziario dà il 3% lordo di interesse annuo. Tali interessi sono tassati al 27%. Calcolare il rendimento netto del titolo.

Soluzione:

Se C è il capitale investito nel titolo

$$\frac{3}{100} \cdot C = \text{ interessi lordi,} \qquad \frac{27}{100} \cdot \frac{3}{100} \cdot C = \text{ tasse}$$

$$\frac{3}{100} \cdot C - \frac{27}{100} \cdot \frac{3}{100} \cdot C = \left(1 - \frac{27}{100}\right) \cdot \frac{3}{100} \cdot C = \frac{73}{100} \cdot \frac{3}{100} \cdot C = \frac{2.19}{100} \cdot C$$

$\Rightarrow$ rendimento netto del 2.19%