

Coordinate cartesiane nel piano

$O = (0, 0)$ origine degli assi

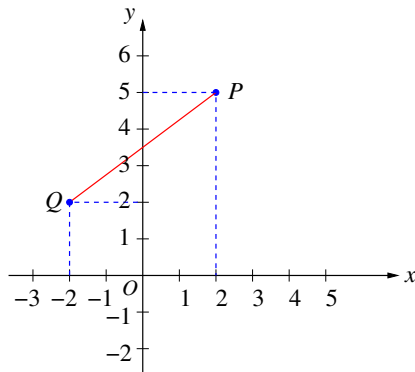
x ascissa, y ordinata

sistemi monometrici:

stessa unità di misura sui due assi x, y

sistemi dimetrici:

unità di misura diverse sui due assi
(utile in alcune applicazioni)



Coordinate cartesiane nel piano

$O = (0, 0)$ origine degli assi

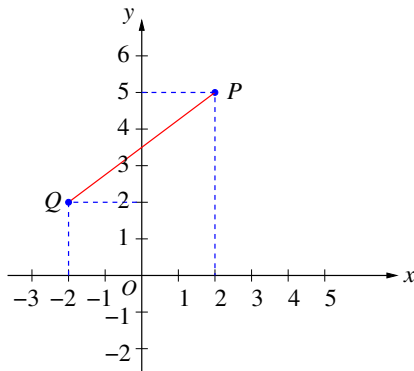
x ascissa, y ordinata

sistemi monometrici:

stessa unità di misura sui due assi x, y

sistemi dimetrici:

unità di misura diverse sui due assi
(utile in alcune applicazioni)



La **distanza** tra due punti $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ è data da

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Se il sistema è monometrico, $d(P, Q)$ è la lunghezza del segmento PQ .

Rette nel piano

Nel piano cartesiano ogni equazione di primo grado

$$ax + by + c = 0$$

con a e b non contemporaneamente nulli, rappresenta una retta e viceversa ogni retta può essere descritta con un'equazione di questo tipo.

Due equazioni con coefficienti a , b , c **proporzionali** rappresentano la medesima retta, ad esempio:

$$2x + y + 5 = 0 \quad \text{e} \quad 4x + 2y + 10 = 0$$

Casi particolari:

- se $a = 0$: $by + c = 0$ descrive una retta **orizzontale**
- se $b = 0$: $ax + c = 0$ descrive una retta **verticale**

Coefficiente angolare e intercetta

Se $b \neq 0$, l'equazione della retta può essere riscritta risolvendo rispetto alla variabile y :

$$y = mx + q \quad \text{dove} \quad m = -\frac{a}{b}, \quad q = -\frac{c}{b}$$

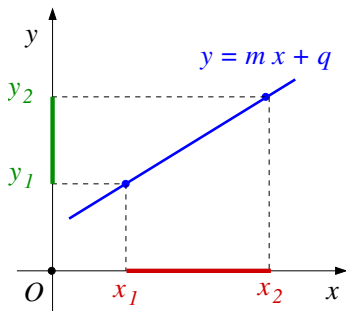
Il numero m si chiama **coefficiente angolare** e rappresenta la *pendenza*.
Il numero q si chiama **intercetta** e rappresenta l'ordinata del punto di intersezione con l'asse y .

Osservazioni:

- una retta (con $b \neq 0$) passa per l'origine se e solo se $q = 0$
- due rette di equazioni $y = mx + q$ e $y = m^*x + q^*$ sono **parallele** se e solo se $m^* = m$
- due rette di equazioni $y = mx + q$ e $y = m^*x + q^*$ sono **perpendicolari** se e solo se $m \cdot m^* = -1$

Coefficiente angolare

Il coefficiente angolare di una retta soddisfa la seguente relazione:
consideriamo sulla retta due punti aventi coordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2)
con $x_1 \neq x_2$



$$y_1 = mx_1 + q$$

$$y_2 = mx_2 + q$$

Sottraendo membro a membro:

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Equazione di una retta passante per due punti

L'equazione della retta passante per due punti assegnati $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ può essere scritta

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \text{oppure} \quad y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

Attenzione: la prima formula vale solo se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$; la seconda formula vale solo se $x_1 \neq x_2$

Esercizio 1.

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (5, -1)$ e $Q = (5, 2)$.

Esercizio 1.

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (5, -1)$ e $Q = (5, 2)$.

Soluzione: P e Q hanno la stessa ascissa 5. Si tratta quindi della retta verticale di equazione $x = 5$.

Esercizio 1.

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (5, -1)$ e $Q = (5, 2)$.

Soluzione: P e Q hanno la stessa ascissa 5. Si tratta quindi della retta verticale di equazione $x = 5$.

Esercizio 2.

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (3, 1)$ e $Q = (\sqrt{2}, 1)$.

Esercizio 1.

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (5, -1)$ e $Q = (5, 2)$.

Soluzione: P e Q hanno la stessa ascissa 5. Si tratta quindi della retta verticale di equazione $x = 5$.

Esercizio 2.

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (3, 1)$ e $Q = (\sqrt{2}, 1)$.

Soluzione: P e Q hanno la stessa ordinata 1. Si tratta quindi della retta orizzontale di equazione $y = 1$.

Esercizio 1.

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (5, -1)$ e $Q = (5, 2)$.

Soluzione: P e Q hanno la stessa ascissa 5. Si tratta quindi della retta verticale di equazione $x = 5$.

Esercizio 2.

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (3, 1)$ e $Q = (\sqrt{2}, 1)$.

Soluzione: P e Q hanno la stessa ordinata 1. Si tratta quindi della retta orizzontale di equazione $y = 1$.

Esercizio 3.

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (0, 1)$ e $Q = (-1, 2)$.

Esercizio 1.

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (5, -1)$ e $Q = (5, 2)$.

Soluzione: P e Q hanno la stessa ascissa 5. Si tratta quindi della retta verticale di equazione $x = 5$.

Esercizio 2.

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (3, 1)$ e $Q = (\sqrt{2}, 1)$.

Soluzione: P e Q hanno la stessa ordinata 1. Si tratta quindi della retta orizzontale di equazione $y = 1$.

Esercizio 3.

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (0, 1)$ e $Q = (-1, 2)$.

Soluzione:
$$\frac{y - 1}{2 - 1} = \frac{x - 0}{-1 - 0} \quad \Rightarrow \quad y = -x + 1$$

Esercizio 4.

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (-1, 2)$ con coefficiente angolare $m = 2$.

Esercizio 4.

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (-1, 2)$ con coefficiente angolare $m = 2$.

Soluzione: $y = 2x + 4$

Esercizio 4.

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (-1, 2)$ con coefficiente angolare $m = 2$.

Soluzione: $y = 2x + 4$

Esercizio 5.

Scrivere l'equazione della retta che interseca l'asse delle ascisse in $x = 5$ e l'asse delle ordinate in $y = -1$.

Esercizio 4.

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (-1, 2)$ con coefficiente angolare $m = 2$.

Soluzione: $y = 2x + 4$

Esercizio 5.

Scrivere l'equazione della retta che interseca l'asse delle ascisse in $x = 5$ e l'asse delle ordinate in $y = -1$.

Soluzione: $y = \frac{1}{5}x - 1$

Esercizio 4.

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (-1, 2)$ con coefficiente angolare $m = 2$.

Soluzione: $y = 2x + 4$

Esercizio 5.

Scrivere l'equazione della retta che interseca l'asse delle ascisse in $x = 5$ e l'asse delle ordinate in $y = -1$.

Soluzione: $y = \frac{1}{5}x - 1$

Esercizio 6.

Scrivere l'equazione della retta che interseca l'asse delle ordinate in $y = 5$, parallela alla retta $y = 3x - 7$.

Esercizi

Esercizio 4.

Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (-1, 2)$ con coefficiente angolare $m = 2$.

Soluzione: $y = 2x + 4$

Esercizio 5.

Scrivere l'equazione della retta che interseca l'asse delle ascisse in $x = 5$ e l'asse delle ordinate in $y = -1$.

Soluzione: $y = \frac{1}{5}x - 1$

Esercizio 6.

Scrivere l'equazione della retta che interseca l'asse delle ordinate in $y = 5$, parallela alla retta $y = 3x - 7$.

Soluzione: $y = 3x + 5$

Insiemi numerici

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ insieme dei numeri naturali
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ insieme dei numeri interi
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$ insieme dei numeri razionali
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{numeri irrazionali}\}$ insieme dei numeri reali

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Esempi di numeri irrazionali:

$\sqrt{2}$, π , il numero di Nepero e , $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\dots$

Sottoinsiemi di numeri reali

Intervalli limitati $a, b \in \mathbb{R}$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ intervallo chiuso

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ intervallo aperto

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ intervallo chiuso a sn e aperto a ds

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ intervallo chiuso a ds e aperto a sn

Intervalli illimitati $a, b \in \mathbb{R}$

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$\mathbb{R}_- = (-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$

Il concetto di funzione nasce da quello di corrispondenza fra grandezze. Tale corrispondenza può essere data in svariati modi:

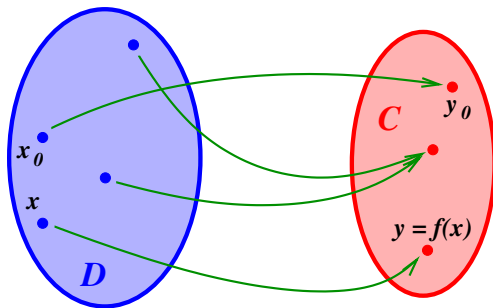
- da un rilevamento empirico
- da una formula (*legge*)

Esempi:

- 1) la temperatura in un certo luogo in un dato intervallo di tempo
- 2) la quotazione giornaliera del Dollaro in Euro in un dato periodo
- 3) lo spazio percorso nel tempo da un corpo in caduta libera:
 $s = \frac{1}{2}g t^2$ (*moto uniformemente accelerato*)
- 4) la relazione tra i lati x , y di un rettangolo di area unitaria: $xy = 1$ da cui si ricava: $y = \frac{1}{x}$

Definizione di funzione

Una **funzione** f è una legge che ad ogni elemento x di un certo insieme D (**dominio**) fa corrispondere **uno ed un solo** elemento y di un secondo insieme C (**codominio**). Si dice che y è l'**immagine** di x tramite f e si scrive $y = f(x)$.



$$f : D \rightarrow C$$

$$f : x \mapsto y = f(x)$$

Grafico di una funzione

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale.

Il **grafico** di f è l'insieme delle coppie $(x, f(x))$.

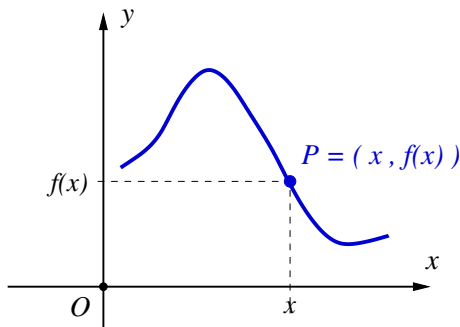


Grafico di $f = \{(x, y) : x \in A, y = f(x)\}$

Funzioni – Esempi

Esempi (funzioni reali di una variabile reale):

- $f(x) = 2x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ retta
- $f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ parabola
- $f(x) = \sqrt{x} \quad \forall x \geq 0$
- $f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$ iperbole equilatera
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$

Si dice che $f(x)$ è il valore della funzione f in x .

Nell'espressione $y = f(x)$, x è detta **variabile indipendente**, mentre y è detta **variabile dipendente**.

Esercizi sulle funzioni

Esercizio 1. Calcolare il valore della funzione $f(x) = 2x - 5$ nei punti $x_1 = 1$ e $x_2 = -2$.

Esercizi sulle funzioni

Esercizio 1. Calcolare il valore della funzione $f(x) = 2x - 5$ nei punti $x_1 = 1$ e $x_2 = -2$.

Soluzione: $f(1) = 2 \cdot 1 - 5 = -3$, $f(-2) = 2 \cdot (-2) - 5 = -9$

Esercizi sulle funzioni

Esercizio 1. Calcolare il valore della funzione $f(x) = 2x - 5$ nei punti $x_1 = 1$ e $x_2 = -2$.

Soluzione: $f(1) = 2 \cdot 1 - 5 = -3$, $f(-2) = 2 \cdot (-2) - 5 = -9$

Esercizio 2. Calcolare il valore della funzione $f(x) = 2x^2 - 3x$ nel punto $x = 2$.

Esercizi sulle funzioni

Esercizio 1. Calcolare il valore della funzione $f(x) = 2x - 5$ nei punti $x_1 = 1$ e $x_2 = -2$.

Soluzione: $f(1) = 2 \cdot 1 - 5 = -3$, $f(-2) = 2 \cdot (-2) - 5 = -9$

Esercizio 2. Calcolare il valore della funzione $f(x) = 2x^2 - 3x$ nel punto $x = 2$.

Soluzione: $f(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$

Esercizi sulle funzioni

Esercizio 1. Calcolare il valore della funzione $f(x) = 2x - 5$ nei punti $x_1 = 1$ e $x_2 = -2$.

Soluzione: $f(1) = 2 \cdot 1 - 5 = -3$, $f(-2) = 2 \cdot (-2) - 5 = -9$

Esercizio 2. Calcolare il valore della funzione $f(x) = 2x^2 - 3x$ nel punto $x = 2$.

Soluzione: $f(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$

Esercizio 3. Calcolare il valore della funzione $f(x) = 3x - \frac{5}{x+1}$ nel punto $x = 4$.

Esercizi sulle funzioni

Esercizio 1. Calcolare il valore della funzione $f(x) = 2x - 5$ nei punti $x_1 = 1$ e $x_2 = -2$.

Soluzione: $f(1) = 2 \cdot 1 - 5 = -3$, $f(-2) = 2 \cdot (-2) - 5 = -9$

Esercizio 2. Calcolare il valore della funzione $f(x) = 2x^2 - 3x$ nel punto $x = 2$.

Soluzione: $f(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$

Esercizio 3. Calcolare il valore della funzione $f(x) = 3x - \frac{5}{x+1}$ nel punto $x = 4$.

Soluzione: $f(4) = 3 \cdot 4 - \frac{5}{4+1} = 11$

Funzioni iniettive e suriettive

- Una funzione $f : D \rightarrow C$ si dice **iniettiva** se elementi distinti di D hanno immagini distinte:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

o, equivalentemente:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- Una funzione $f : D \rightarrow C$ si dice **suriettiva** se ogni elemento del *codominio* C è *immagine* di qualche elemento del *dominio*. In simboli:

$$\forall y \in C \quad \exists x \in D : \quad f(x) = y$$

- Una funzione $f : D \rightarrow C$ contemporaneamente iniettiva e suriettiva si dice **biunivoca** (o biettiva)

Funzioni biunivoche

Una funzione $f : D \rightarrow C$ è **biunivoca** (o biettiva) se

ogni $y \in C$ è immagine di **uno ed un solo** elemento $x \in D$.

Esempi:

- 1) $D = C = \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ è biunivoca: $y \in \mathbb{R}$ è immagine di $x = \frac{1}{2}(y - 1)$
- 2) $D = C = \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x}$ è biunivoca: $y \in \mathbb{R}_+$ è immagine di $x = y^2$
- 3) $D = \mathbb{R}_-$, $C = \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ è biunivoca: $y \in \mathbb{R}_+$ è immagine di $x = -\sqrt{y}$
- 4) $D = \mathbb{R}_+$, $C = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ non è biunivoca: $y < 0$ non è immagine di alcun x
- 5) $D = \mathbb{R}$, $C = \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ non è biunivoca: $y = 4$ è immagine di $x = \pm 2$

Operazioni sulle funzioni

Date due funzioni f e g a valori reali, sull'**intersezione dei due domini** si possono definire

- *funzione somma*: $s(x) = f(x) + g(x)$
- *funzione differenza*: $d(x) = f(x) - g(x)$
- *funzione prodotto*: $p(x) = f(x) \cdot g(x)$
- *funzione quoziente*: $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ definita per x tale che $g(x) \neq 0$

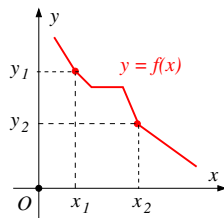
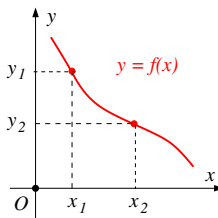
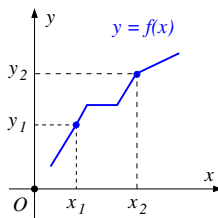
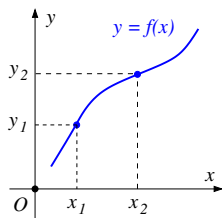
Esempi:

- 1) *somma*: $f(x) = x$, $g(x) = 5 \Rightarrow (f + g)(x) = x + 5$
- 2) *prodotto*: $f(x) = x$, $g(x) = x + 5 \Rightarrow (f \cdot g)(x) = x(x + 5) = x^2 + 5x$
- 3) *quoziente*: $f(x) = x + 3$, $g(x) = x^2 - 1 \Rightarrow \frac{f}{g}(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 1}$ per $x \neq \pm 1$
- 4) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x - 5 \Rightarrow \frac{f - g}{h}(x) = \frac{\sqrt{x} - x^2}{x - 5}$
Qual è il dominio?

Funzioni monotone

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice

- **strettamente crescente:** $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **debolmente crescente:** $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- **strettamente decrescente:** $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- **debolmente decrescente:** $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$



Esercizio 1. Dimostrare che la funzione $f(x) = 3x + 1$ è strettamente crescente per $x \in \mathbb{R}$.

Esercizi sulle funzioni monotone

Esercizio 1. Dimostrare che la funzione $f(x) = 3x + 1$ è strettamente crescente per $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione: per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$ si ha

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \Rightarrow 3x_1 + 1 < 3x_2 + 1 \quad \text{cioè} \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Ragionando in modo analogo, si dimostra che:

la funzione $f(x) = mx + q$ con $m > 0$ è strettamente crescente per $x \in \mathbb{R}$;

la funzione $f(x) = mx + q$ con $m < 0$ è strettamente decrescente per $x \in \mathbb{R}$.

Esercizi sulle funzioni monotone

Esercizio 2. Dimostrare che la funzione $f(x) = x^2$ è strettamente crescente per $x \geq 0$.

Esercizi sulle funzioni monotone

Esercizio 2. Dimostrare che la funzione $f(x) = x^2$ è strettamente crescente per $x \geq 0$.

Soluzione: per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \geq 0$ con $x_1 < x_2$ abbiamo, in particolare, che

$$0 \leq x_1 < x_2.$$

Moltiplicando per x_1 (che è non negativo), si ottiene

$$(x_1)^2 \leq x_1 x_2,$$

mentre moltiplicando per x_2 (che è strettamente positivo), si ottiene

$$x_1 x_2 < (x_2)^2.$$

Ne segue che

$$(x_1)^2 \leq x_1 x_2 < (x_2)^2, \quad \text{cioè} \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Esercizi sulle funzioni monotone

Esercizio 3. Dimostrare che la funzione $f(x) = x^2$ è strettamente decrescente per $x \leq 0$.

Esercizi sulle funzioni monotone

Esercizio 3. Dimostrare che la funzione $f(x) = x^2$ è strettamente decrescente per $x \leq 0$.

Soluzione: per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \leq 0$ con $x_1 < x_2$ abbiamo, in particolare, che

$$x_1 < x_2 \leq 0.$$

Moltiplicando per x_1 (che è strettamente negativo), si ottiene

$$(x_1)^2 > x_1 x_2,$$

mentre moltiplicando per x_2 (che è non positivo), si ottiene

$$x_1 x_2 \geq (x_2)^2.$$

Ne segue che

$$(x_1)^2 > x_1 x_2 \geq (x_2)^2, \quad \text{cioè} \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Minimi assoluti e relativi di una funzione

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in A$.

- **minimo assoluto (o globale):**

x_0 è punto di minimo assoluto se $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in A$

- **minimo relativo (o locale):**

si dice che in x_0 la funzione ha un punto di minimo relativo se “vicino” a x_0 assume solo valori *maggiori o uguali* di $f(x_0)$,
cioè,

x_0 è punto di minimo relativo se

esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Massimi assoluti e relativi di una funzione

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in A$.

- **massimo assoluto (o globale):**

x_0 è punto di massimo assoluto se $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in A$

- **massimo relativo (o locale):**

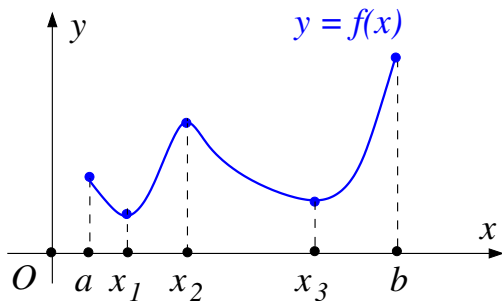
si dice che in x_0 la funzione ha un punto di massimo relativo se “vicino” a x_0 assume solo valori *minori o uguali* di $f(x_0)$

cioè,

x_0 è punto di massimo relativo se

esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Minimi e massimi di funzione



- x_1 punto di minimo assoluto, $f(x_1)$ valore minimo assoluto;
- x_2 punto di massimo relativo, $f(x_2)$ valore massimo relativo;
- x_3 punto di minimo relativo, $f(x_3)$ valore minimo relativo;
- b punto di massimo assoluto, $f(b)$ valore massimo assoluto.

Esercizio 1. Trovare i punti di massimo assoluto, il valore massimo assoluto, i punti di minimo assoluto e il valore minimo assoluto della funzione $f(x) = 3x - 2$ nell'intervallo $[1, 2]$.

Esercizi su massimi e minimi

Esercizio 1. Trovare i punti di massimo assoluto, il valore massimo assoluto, i punti di minimo assoluto e il valore minimo assoluto della funzione $f(x) = 3x - 2$ nell'intervallo $[1, 2]$.

Soluzione: la funzione ha come grafico una retta il cui coefficiente angolare è positivo e dunque è strettamente crescente. Quindi la funzione assume il massimo assoluto nel punto $x = 2$ e il valore del massimo è $f(2) = 4$, mentre la funzione assume il minimo assoluto nel punto $x = 1$ e il valore del minimo è $f(1) = 1$.

Esercizio 2. Trovare i punti di massimo assoluto, il valore massimo assoluto, i punti di minimo assoluto e il valore minimo assoluto della funzione $f(x) = -x^2$ nell'intervallo $[0, 5]$.

Esercizio 2. Trovare i punti di massimo assoluto, il valore massimo assoluto, i punti di minimo assoluto e il valore minimo assoluto della funzione $f(x) = -x^2$ nell'intervallo $[0, 5]$.

Soluzione: la funzione in $[0, 5]$ è strettamente decrescente. Quindi la funzione assume il massimo assoluto nel punto $x = 0$ e il valore del massimo è 0, mentre la funzione assume il minimo assoluto nel punto $x = 5$ e il valore del minimo è -25 .

Esercizio 3. Dire se la funzione $f(x) = x^2 + 1$ ha massimo assoluto su tutto $\mathbb{R}$. Dire se la stessa funzione ha minimo assoluto su $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Dire se la funzione $f(x) = x^2 + 1$ ha massimo assoluto su tutto $\mathbb{R}$. Dire se la stessa funzione ha minimo assoluto su $\mathbb{R}$.

Soluzione: la funzione non ha massimo assoluto; il minimo assoluto è assunto nel punto $x = 0$ e il suo valore è $f(0) = 1$.

Esercizio 4. Trovare i punti di massimo assoluto, il valore massimo assoluto, i punti di minimo assoluto e il valore minimo assoluto su $\mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x < -1 \\ -x + 2 & \text{per } -1 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

Esercizi su massimi e minimi

Esercizio 4. Trovare i punti di massimo assoluto, il valore massimo assoluto, i punti di minimo assoluto e il valore minimo assoluto su $\mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x < -1 \\ -x + 2 & \text{per } -1 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

Soluzione: il massimo assoluto è assunto nel punto $x = -1$ e per $x > 2$, il valore del massimo è 3. Il minimo assoluto è assunto nel punto $x = 2$ e il valore del minimo è 0.

Funzione composta

Date due funzioni $g : A \rightarrow B$ e $f : B \rightarrow C$ si può definire la **funzione composta**:

$$f \circ g : A \rightarrow C \quad x \mapsto g(x) \mapsto f(g(x))$$

notazione funzionale $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Il campo di esistenza della funzione composta è costituito dai soli valori di x per i quali la composizione funzionale ha senso. La composizione **ha senso se**: x appartiene al dominio di g e il valore $g(x)$ appartiene al dominio di f .

Esempi:

- $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 4 \Rightarrow (f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
con $D = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
- $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x - 7 \Rightarrow (f \circ g)(x) = \frac{1}{x - 7}$
con $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 7\}$
- $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow (f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ con $D = \mathbb{R}$

Esercizi sulla funzione composta

Esercizio 1. Date le funzioni $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 2x + 1$,

- (a) determinare il campo di esistenza di $f \circ g$ e scriverne l'espressione;
- (b) determinare il campo di esistenza di $g \circ f$ e scriverne l'espressione.

Esercizi sulla funzione composta

Esercizio 1. Date le funzioni $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 2x + 1$,

- (a) determinare il campo di esistenza di $f \circ g$ e scriverne l'espressione;
- (b) determinare il campo di esistenza di $g \circ f$ e scriverne l'espressione.

Soluzione:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{2x + 1} \quad \text{definita per } x \geq -\frac{1}{2}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2\sqrt{x} + 1 \quad \text{definita per } x \geq 0$$

Esercizi sulla funzione composta

Esercizio 2. Date le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$,

- (a) determinare il campo di esistenza di $f \circ g$ e scriverne l'espressione;
- (b) determinare il campo di esistenza di $g \circ f$ e scriverne l'espressione.

Esercizi sulla funzione composta

Esercizio 2. Date le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$,

- (a) determinare il campo di esistenza di $f \circ g$ e scriverne l'espressione;
- (b) determinare il campo di esistenza di $g \circ f$ e scriverne l'espressione.

Soluzione:

$$(f \circ g)(x) = (x + 1)^2$$

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 1$$

Entrambe le funzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

Funzione inversa

Una funzione **biunivoca** è sempre **invertibile**, cioè:

se $f : D \rightarrow C$ è biunivoca, possiamo definire la **funzione inversa** f^{-1}

$$f^{-1} : C \rightarrow D, \quad x = f^{-1}(y)$$

per ogni $y \in C$, x è l'unico punto di D tale che $f(x) = y$

Nota bene: un tale x esiste ed è unico perché la funzione f è biunivoca

Esempi:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + 1$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y - 1)$$

- $f : (-\infty, 0] \rightarrow [0, +\infty), \quad f(x) = x^2$

$$f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0], \quad f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$$

Proprietà della funzione inversa

Sia $f : D \rightarrow C$ invertibile e sia $f^{-1} : C \rightarrow D$ la sua funzione inversa.

Consideriamo la funzione composta $f^{-1} \circ f$:

$$f^{-1} \circ f : x \in D \mapsto f(x) \in C \mapsto f^{-1}(f(x)) = x \in D$$

In altre parole, $f^{-1} \circ f : D \rightarrow D$, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ è la funzione identità su D .

Analoga proprietà vale per $f \circ f^{-1}$:

$$f \circ f^{-1} : y \in C \mapsto f^{-1}(y) \in D \mapsto f(f^{-1}(y)) = y \in C$$

In altre parole, $f \circ f^{-1} : C \rightarrow C$, $(f \circ f^{-1})(y) = y$ è la funzione identità su C .

Grafico della funzione inversa

Il grafico di f^{-1} si ottiene per simmetria rispetto alla retta $y = x$.

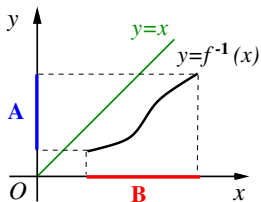
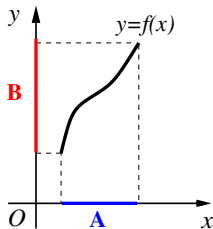


Grafico della funzione inversa

Il grafico di f^{-1} si ottiene per simmetria rispetto alla retta $y = x$.

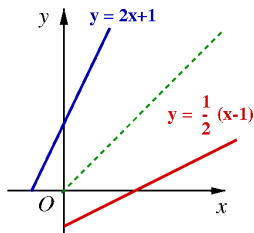
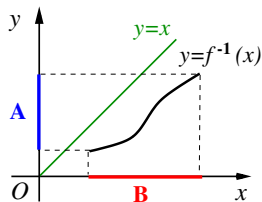
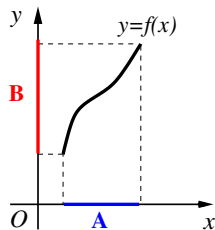
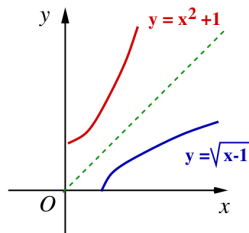
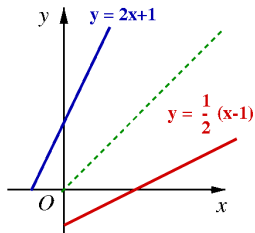
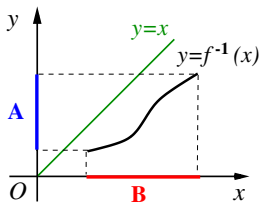
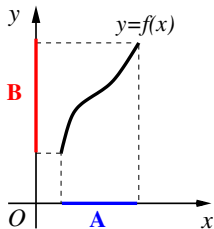


Grafico della funzione inversa

Il grafico di f^{-1} si ottiene per simmetria rispetto alla retta $y = x$.



Ancora sulla funzione inversa

Attenzione: non confondere la funzione inversa f^{-1} con la funzione reciproco $\frac{1}{f}$!!!

Esempio 1. Consideriamo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$.

La funzione inversa è $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \frac{y}{3}$.

La funzione reciproco è $g : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{3x}$.

Esempio 2. Consideriamo $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$.

La funzione inversa è $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

La funzione reciproco è $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2}$.

Criterio di invertibilità

Le funzioni strettamente monotone sono iniettive.

Criterio di invertibilità:

se f è strettamente monotona e suriettiva, allora f è invertibile.

Inoltre, se $f : D \rightarrow C$ è invertibile, allora

$$f \text{ crescente} \Leftrightarrow f^{-1} \text{ crescente}$$

$$f \text{ decrescente} \Leftrightarrow f^{-1} \text{ decrescente}$$

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = -x + 3$. Stabilire se f è invertibile e, in caso affermativo, trovare la formula dell'inversa.

Esercizi sulle funzioni inverse

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = -x + 3$. Stabilire se f è invertibile e, in caso affermativo, trovare la formula dell'inversa.

Soluzione: la funzione f è biunivoca, quindi invertibile, e l'inversa è $f^{-1}(y) = -y + 3$.

Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Stabilire se f è invertibile e, in caso affermativo, trovare la formula dell'inversa.

Esercizi sulle funzioni inverse

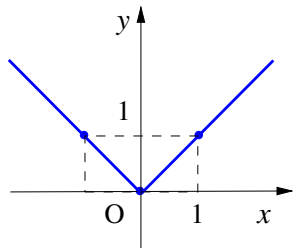
Esercizio 2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Stabilire se f è invertibile e, in caso affermativo, trovare la formula dell'inversa.

Soluzione: la funzione non è invertibile in quanto non è né iniettiva, né suriettiva.

Osserviamo che per renderla suriettiva basta considerare $\mathbb{R}_+$ come codominio. Invece, per renderla iniettiva si può ad esempio restringere il dominio a $[-1, +\infty)$. La funzione $f : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ definita da $f(x) = x^2 + 2x + 1$ è invertibile e la sua inversa è

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow [-1, +\infty), \quad f^{-1}(y) = \sqrt{y} - 1.$$

Funzione valore assoluto



$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{per } x \geq 0 \\ -x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Proprietà:

- $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$
- $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- $\left| \frac{x_1}{x_2} \right| = \frac{|x_1|}{|x_2|} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ con } x_2 \neq 0$
- $\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **disuguaglianza triangolare:**
 $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- se $\delta > 0$, $|x| \leq \delta \Leftrightarrow -\delta \leq x \leq \delta$

Analogamente:

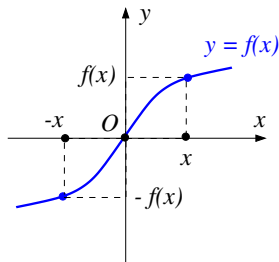
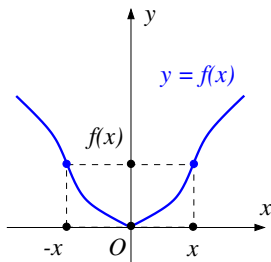
$$|x - x_0| \leq \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$$

Funzioni pari e dispari

- Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **pari**: se $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
In questo caso il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse y
- Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **dispari**: se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
In questo caso il grafico di f è simmetrico rispetto all'origine O

Esempi: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^{2n}$, $f(x) = |x|$ funzioni pari

$f(x) = x$, $f(x) = x^{2n+1}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ funzioni dispari



Esercizio 1. Risolvere le seguenti disequazioni:

- $|2x + 3| \leq 1$

- $|2x + 3| \leq -2$

- $|4x + 1| > 2$

Esercizio 2. Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{per } x \leq -1 \\ |x| & \text{per } x > -1 \end{cases}$$

e determinarne gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti e relativi nell'intervallo $(-\infty, 3]$.

Esercizio 3. (compito d'esame del 26/09/2013)

Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{per } -2 \leq x < -1, \\ 2|x| & \text{per } -1 \leq x < 2, \\ 4x - x^2 & \text{per } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

e determinarne gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti e relativi nell'intervallo $[-2, 4]$.

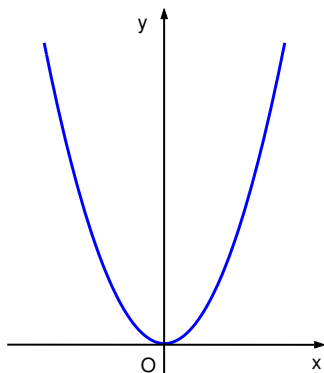
Esercizio 4. (compito d'esame del 26/09/2013)

Disegnare il grafico qualitativo della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - x^2 & \text{per } -2 \leq x < -1, \\ |x| & \text{per } -1 \leq x < 2, \\ 4 - x & \text{per } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

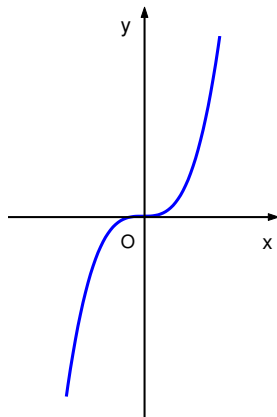
e determinarne gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti e relativi nell'intervallo $[-2, 3]$.

Potenze con esponente intero positivo



$$y = f(x) = x^2$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ funzione pari



$$y = g(x) = x^3$$

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione dispari

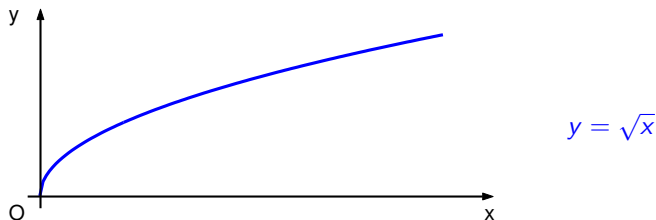
Il grafico di x^n è qualitativamente simile a quello di x^2 se n è **pari** o a quello di x^3 se n è **dispari**.

Radici

Consideriamo il problema dell'invertibilità della funzione potenza $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

- Se $n = 1$, la funzione $f(x) = x$ è l'**identità**, con inversa uguale a se stessa.
- Se $n = 2$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ **non** è invertibile, ma lo è da $[0, +\infty)$ in $[0, +\infty)$. Chiamiamo **radice quadrata** la sua inversa:

$$f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$



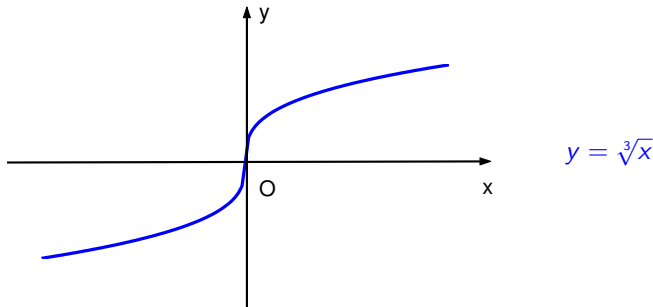
In generale, se n è pari, la funzione $f(x) = x^n$ è invertibile da $[0, +\infty)$ in $[0, +\infty)$. Chiamiamo l'inversa **radice n -sima** $\sqrt[n]{x}$ definita da $[0, +\infty)$ in $[0, +\infty)$.

Radici

- Se $n = 3$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ è invertibile.

Chiamiamo **radice cubica** la sua inversa:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$



In generale, se n è dispari, la funzione $f(x) = x^n$ è invertibile da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Chiamiamo l'inversa **radice n -sima** $\sqrt[n]{x}$ definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Funzioni potenza

Potenze ad esponente intero:

- se $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- se l'esponente è un intero negativo,

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{definita per ogni } x \neq 0.$$

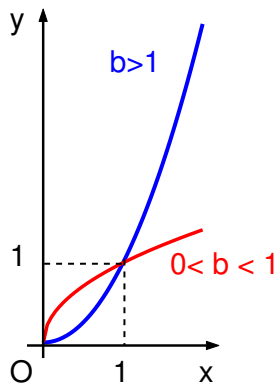
Potenze ad esponente razionale: per $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \quad \text{definita per ogni } x > 0.$$

Potenze ad esponente reale: per *estensione* si può definire la *potenza ad esponente reale*: $b \in \mathbb{R}$

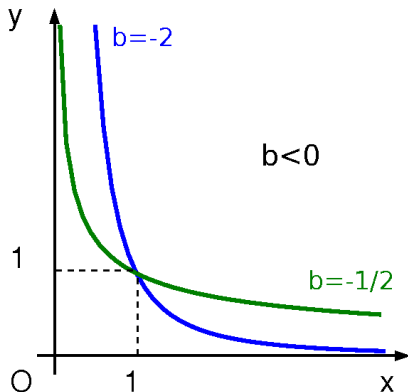
$$f(x) = x^b \quad \text{definita per ogni } x > 0 \quad (\text{resta indefinito } 0^0 \text{ !!!})$$

Grafico di $f(x) = x^b$ con $b \in \mathbb{R}$



$$y = f(x) = x^b \text{ per } b > 0$$

$$f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$



$$y = f(x) = x^b \text{ per } b < 0$$

$$f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$$

Ancora sulle potenze

Polinomi: con operazioni di somma e prodotto si costruiscono i **polinomi**, cioè le funzioni del tipo:

$$x \mapsto P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n.$$

P_n è detto polinomio di grado n .

Funzioni Razionali: facendo il quoziente di due polinomi P e Q si ottengono le **funzioni razionali**, del tipo:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{definita su } \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}.$$

Come **caso particolare** ritroviamo le funzioni potenza con esponente intero:

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{definita su } \mathbb{R} - \{0\}.$$

Campo di esistenza

Il campo di esistenza di una funzione f è il dominio più grande su cui ha significato la funzione f .

Esercizio. Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = 9 + 2x$

2) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{-x}$

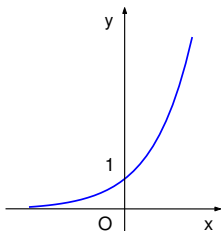
3) $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-4}$

4) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x+3}}$

Soluzioni:

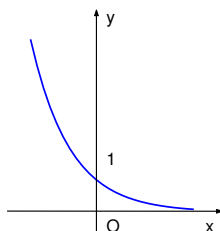
- 1) $\mathbb{R}$
- 2) Affinché le due radici abbiano significato, i radicandi devono essere entrambi non negativi: $x - 2 \geq 0$ e $-x \geq 0$, cioè $x \geq 2$ e $x \leq 0$.
Segue che la funzione non è definita per alcun valore di x .
- 3) Il denominatore deve essere diverso da zero, cioè $x \neq 2$ e $x \neq -2$.
L'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, cioè $9 - x^2 \geq 0$ e quindi $-3 \leq x \leq 3$. Dunque il campo di esistenza è $[-3, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 3]$.
- 4) L'unica condizione da imporre è che il denominatore sia diverso da 0. Quindi il campo di esistenza è $\mathbb{R} - \{-3\}$.

Funzione esponenziale



$$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$$
$$f(x) = a^x \text{ con } a > 1$$

- $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **strettamente crescente:**
 $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$
- se x tende a $+\infty$, a^x tende a $+\infty$
- se x tende a $-\infty$, a^x tende a 0



$$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$$
$$f(x) = a^x \text{ con } 0 < a < 1$$

- $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- **strettamente decrescente:**
 $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$
- se x tende a $+\infty$, a^x tende a 0
- se x tende a $-\infty$, a^x tende a $+\infty$

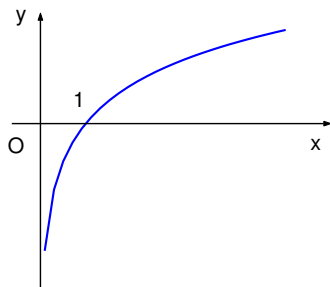
Proprietà: $a^x a^y = a^{x+y}$ $(a^x)^y = a^{xy}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

Funzione logaritmo

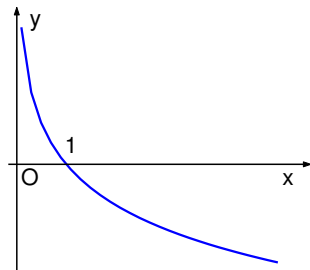
La funzione esponenziale $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$ è strettamente monotona e suriettiva, quindi invertibile.

$f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$ logaritmo in base a di x

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$



$$y = \log_a x \text{ con } a > 1$$



$$y = \log_a x \text{ con } 0 < a < 1$$

Proprietà del logaritmo

Il logaritmo $\log_a x$ è l'esponente a cui bisogna elevare la base a per ottenere x .

- $a^{\log_a x} = x$ per ogni $x > 0$
- $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$
- $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$ per ogni $x_1, x_2 > 0$
- $\log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$ per ogni $x_1, x_2 > 0$
- $\log_a(x^b) = b \log_a x$ per ogni $x > 0$ e $b \in \mathbb{R}$
- **cambio di base:** $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ per ogni $x > 0$ e $a, b > 0$

Il pH

Acidi e sali in soluzioni acquose formano ioni di idrogeno.

La concentrazione di questi ioni permette di quantificare il grado di **acidità** o **alcalinità** della soluzione.

Il punto di riferimento è l'acqua pura a 25 gradi C, in cui si hanno 10^{-7} moli/l di ioni. Si parla di:

- **soluzioni acide**, se la concentrazione di ioni è maggiore di 10^{-7}
- **soluzioni basiche o alcaline**, se la concentrazione di ioni è minore di 10^{-7}
- **soluzioni neutre**, se la concentrazione di ioni è pari a 10^{-7}

Si definisce pH

$$\text{pH} = -\log_{10} \text{H}^+$$

dove H^+ è la concentrazione di ioni idrogeno.

Il pH – Esercizio

sostanza	pH
acqua pura	7
sangue	7.4
pioggia	6.5

Il pH della pioggia e quello del sangue differiscono di poco; tuttavia,

$$H_{\text{pioggia}}^+ = 10^{-6.5}, \quad H_{\text{sangue}}^+ = 10^{-7.4},$$

da cui

$$\frac{H_{\text{pioggia}}^+}{H_{\text{sangue}}^+} = 10^{0.9} \simeq 8,$$

cioè la concentrazione di ioni nella pioggia è circa 8 volte quella del sangue.

Esercizio. Verificare che la concentrazione di ioni idrogeno nel sangue è circa il 40% di quella nell'acqua.

Esercizio 1. Sapendo che $\log_{10} 2 \simeq 0.30103$ e che $\log_{10} e \simeq 0.43429$, calcolare i valori di $\log_{10} 4$, $\log_{10} \frac{1}{5}$, $\log_e 2$.

Esercizio 1. Sapendo che $\log_{10} 2 \simeq 0.30103$ e che $\log_{10} e \simeq 0.43429$, calcolare i valori di $\log_{10} 4$, $\log_{10} \frac{1}{5}$, $\log_e 2$.

Soluzione: basta notare che

$$\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2 \log_{10} 2,$$

$$\log_{10} \frac{1}{5} = \log_{10} \frac{2}{10} = \log_{10} 2 - \log_{10} 10 = \log_{10} 2 - 1,$$

$$\ln 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} e}.$$

Esercizi

Esercizio 1. Sapendo che $\log_{10} 2 \simeq 0.30103$ e che $\log_{10} e \simeq 0.43429$, calcolare i valori di $\log_{10} 4$, $\log_{10} \frac{1}{5}$, $\log_e 2$.

Soluzione: basta notare che

$$\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2 \log_{10} 2,$$

$$\log_{10} \frac{1}{5} = \log_{10} \frac{2}{10} = \log_{10} 2 - \log_{10} 10 = \log_{10} 2 - 1,$$

$$\ln 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} e}.$$

Esercizio 2. Determinare le costanti α e β in modo che il grafico della funzione $f(x) = \alpha e^{\beta x}$ passi per i punti $(0, 5)$ e $(4, 15)$.

Esercizio 1. Sapendo che $\log_{10} 2 \simeq 0.30103$ e che $\log_{10} e \simeq 0.43429$, calcolare i valori di $\log_{10} 4$, $\log_{10} \frac{1}{5}$, $\log_e 2$.

Soluzione: basta notare che

$$\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2 \log_{10} 2,$$

$$\log_{10} \frac{1}{5} = \log_{10} \frac{2}{10} = \log_{10} 2 - \log_{10} 10 = \log_{10} 2 - 1,$$

$$\ln 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} e}.$$

Esercizio 2. Determinare le costanti α e β in modo che il grafico della funzione $f(x) = \alpha e^{\beta x}$ passi per i punti $(0, 5)$ e $(4, 15)$.

Soluzione: poiché $f(0) = \alpha$, si ha immediatamente che $\alpha = 5$. Si ottiene quindi che $f(4) = 5e^{4\beta} = 15$, da cui $e^{4\beta} = 3$, cioè $\beta = \frac{1}{4} \ln 3$.

Esercizio 3. Determinare l'insieme dei valori di x per cui si ha $\log_{10}(2x + 3) < 1$.

Esercizio 3. Determinare l'insieme dei valori di x per cui si ha $\log_{10}(2x + 3) < 1$.

Soluzione: l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè $2x + 3 > 0$. Inoltre, per la stretta monotonia dell'esponenziale la condizione $\log_{10}(2x + 3) < 1$ è equivalente a $2x + 3 < 10$. Pertanto, l'insieme cercato è l'intervallo $(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$.

Esercizio 3. Determinare l'insieme dei valori di x per cui si ha $\log_{10}(2x + 3) < 1$.

Soluzione: l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè $2x + 3 > 0$. Inoltre, per la stretta monotonia dell'esponenziale la condizione $\log_{10}(2x + 3) < 1$ è equivalente a $2x + 3 < 10$. Pertanto, l'insieme cercato è l'intervallo $(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$.

Esercizio 4. Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \log_{10}(x^2 - 5x + 6).$$

Esercizio 3. Determinare l'insieme dei valori di x per cui si ha $\log_{10}(2x + 3) < 1$.

Soluzione: l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè $2x + 3 > 0$. Inoltre, per la stretta monotonia dell'esponenziale la condizione $\log_{10}(2x + 3) < 1$ è equivalente a $2x + 3 < 10$. Pertanto, l'insieme cercato è l'intervallo $(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$.

Esercizio 4. Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \log_{10}(x^2 - 5x + 6).$$

Soluzione: l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè $x^2 - 5x + 6 > 0$, quindi il campo di esistenza è $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

Esercizio 5. Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log_{10}(x^2 - 5x + 7)}.$$

Esercizio 5. Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log_{10}(x^2 - 5x + 7)}.$$

Soluzione: l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè $x^2 - 5x + 7 > 0$. L'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, cioè $\log(x^2 - 5x + 7) \geq 0$, quindi $x^2 - 5x + 7 \geq 1$. La seconda condizione contiene anche la prima. Quindi, il campo di esistenza è $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.

Esercizio 5. Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log_{10}(x^2 - 5x + 7)}.$$

Soluzione: l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè $x^2 - 5x + 7 > 0$. L'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, cioè $\log(x^2 - 5x + 7) \geq 0$, quindi $x^2 - 5x + 7 \geq 1$. La seconda condizione contiene anche la prima. Quindi, il campo di esistenza è $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.

Esercizio 6. Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sqrt{e^x - 1}.$$

Esercizio 5. Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log_{10}(x^2 - 5x + 7)}.$$

Soluzione: l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè $x^2 - 5x + 7 > 0$. L'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, cioè $\log(x^2 - 5x + 7) \geq 0$, quindi $x^2 - 5x + 7 \geq 1$. La seconda condizione contiene anche la prima. Quindi, il campo di esistenza è $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.

Esercizio 6. Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sqrt{e^x - 1}.$$

Soluzione: l'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, cioè $e^x - 1 \geq 0$ e quindi $x \geq 0$. Il campo di esistenza è $[0, +\infty)$.

Esercizio 7. Date le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln(x - 2)$,

- (a) determinare il campo di esistenza di $f \circ g$ e scriverne l'espressione;
- (b) determinare il campo di esistenza di $g \circ f$ e scriverne l'espressione.

Esercizio 7. Date le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln(x - 2)$,

- (a) determinare il campo di esistenza di $f \circ g$ e scriverne l'espressione;
- (b) determinare il campo di esistenza di $g \circ f$ e scriverne l'espressione.

Soluzione: $(f \circ g)(x) = e^{\ln(x-2)} = x - 2$ definita per $x > 2$

$(g \circ f)(x) = \ln(e^x - 2)$ definita per $x > \ln 2$

Esercizio 7. Date le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln(x - 2)$,

- (a) determinare il campo di esistenza di $f \circ g$ e scriverne l'espressione;
- (b) determinare il campo di esistenza di $g \circ f$ e scriverne l'espressione.

Soluzione: $(f \circ g)(x) = e^{\ln(x-2)} = x - 2$ definita per $x > 2$

$(g \circ f)(x) = \ln(e^x - 2)$ definita per $x > \ln 2$

Esercizio 8. Date le funzioni $f(x) = -x^3$ e $g(x) = \ln x$,

- (a) determinare il campo di esistenza di $f \circ g$ e scriverne l'espressione;
- (b) determinare il campo di esistenza di $g \circ f$ e scriverne l'espressione.

Esercizio 7. Date le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln(x - 2)$,

- (a) determinare il campo di esistenza di $f \circ g$ e scriverne l'espressione;
- (b) determinare il campo di esistenza di $g \circ f$ e scriverne l'espressione.

Soluzione: $(f \circ g)(x) = e^{\ln(x-2)} = x - 2$ definita per $x > 2$

$(g \circ f)(x) = \ln(e^x - 2)$ definita per $x > \ln 2$

Esercizio 8. Date le funzioni $f(x) = -x^3$ e $g(x) = \ln x$,

- (a) determinare il campo di esistenza di $f \circ g$ e scriverne l'espressione;
- (b) determinare il campo di esistenza di $g \circ f$ e scriverne l'espressione.

Soluzione: $(f \circ g)(x) = -(\ln x)^3$ definita per $x > 0$

$(g \circ f)(x) = \ln(-x^3)$ definita per $x < 0$

Esercizio 9. Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{3x - 5}; \quad f(x) = 4e^{\frac{1}{x}}.$$

Esercizio 9. Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{3x - 5}; \quad f(x) = 4e^{\frac{1}{x}}.$$

Esercizio 10. Date le funzioni

$$f(x) = \ln(x - 1), \quad g(x) = \sqrt{1 + x},$$

scrivere le espressioni di $f \circ g$ e $g \circ f$, precisandone il campo di esistenza.

Esercizio 9. Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{3x - 5}; \quad f(x) = 4e^{\frac{1}{x}}.$$

Esercizio 10. Date le funzioni

$$f(x) = \ln(x - 1), \quad g(x) = \sqrt{1 + x},$$

scrivere le espressioni di $f \circ g$ e $g \circ f$, precisandone il campo di esistenza.

Esercizio 11. Date le funzioni

$$f(x) = \ln(x - 1), \quad g(x) = x^2,$$

scrivere le espressioni di $f \circ g$ e $g \circ f$, precisandone il campo di esistenza.

Soluzione Esercizio 9:

La funzione $f(x) = \frac{x^2 - 5}{3x - 5}$ è definita per $x \neq \frac{5}{3}$

La funzione $f(x) = 4e^{\frac{1}{x}}$ è definita per $x \neq 0$

Soluzione Esercizio 10:

$(f \circ g)(x) = \ln(\sqrt{1+x} - 1)$ definita per $x \in (0, +\infty)$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{1 + \ln(x-1)}$ definita per $x \in [1 + \frac{1}{e}, +\infty)$

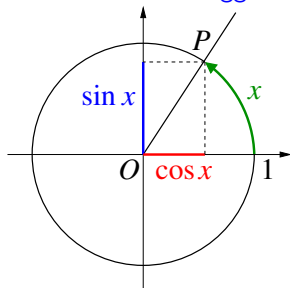
Soluzione Esercizio 11:

$(f \circ g)(x) = \ln(x^2 - 1)$ definita per $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$(g \circ f)(x) = (\ln(x-1))^2$ definita per $x \in (1, +\infty)$

Funzioni seno e coseno

Circonferenza di raggio 1



Dato $x \in \mathbb{R}$ si costruisce il punto P partendo da $(1,0)$ e percorrendo un arco di lunghezza $|x|$

- in senso *antiorario* se $x > 0$
- in senso *orario* se $x < 0$

Per definizione $P = (\cos x, \sin x)$.

Relazione fondamentale:

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Proprietà di $\sin x$:

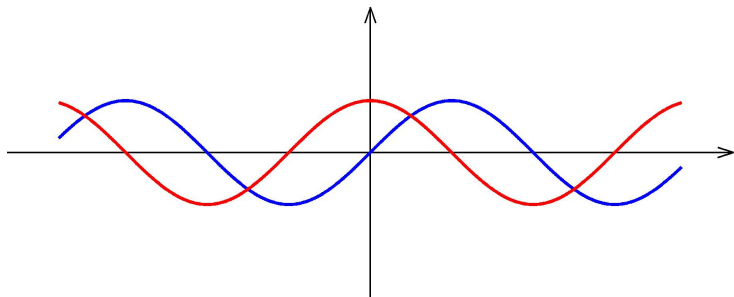
- periodica:
 $\sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\sin x > 0$ per $x \in (0, \pi)$
 $\sin x < 0$ per $x \in (\pi, 2\pi)$
- è crescente in $[0, \frac{\pi}{2}]$ e in $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
- è decrescente in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
- dispari: $\sin(-x) = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- alcuni valori notevoli:
 $\sin 0 = \sin \pi = \sin 2\pi = 0$
 $\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin \frac{3\pi}{2} = -1$

Funzioni seno e coseno

Dalle proprietà precedenti si ottiene il seguente grafico per $y = \sin x$.

Il grafico $y = \cos x$ si ottiene per traslazione poiché si ha

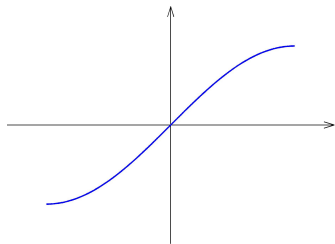
$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Funzione arcoseno

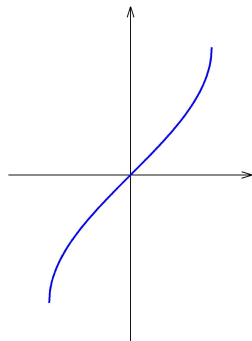
La funzione $f(x) = \sin x$ definita per $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ a valori in $[-1, 1]$ è biunivoca.

$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è la sua funzione inversa.



$$f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$$

$$f(x) = \sin x$$



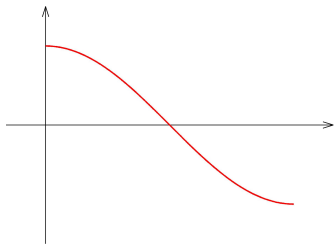
$$f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$f^{-1}(x) = \arcsin x$$

Funzione arcocoseno

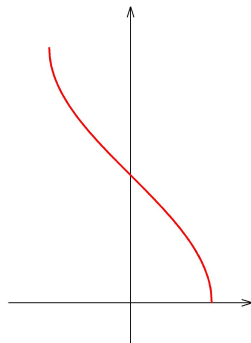
La funzione $g(x) = \cos x$ definita per $x \in [0, \pi]$ a valori in $[-1, 1]$ è biunivoca.

$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ è la sua funzione inversa.



$$g : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

$$g(x) = \cos x$$



$$g^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$g^{-1}(x) = \arccos x$$

Funzione tangente

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{per ogni } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

È una funzione periodica di periodo π e dispari.

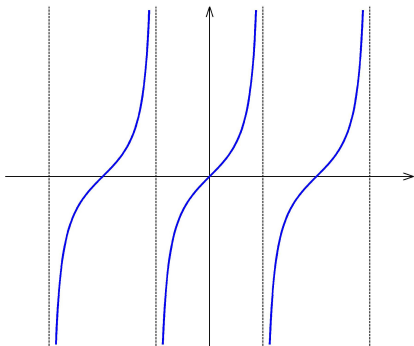
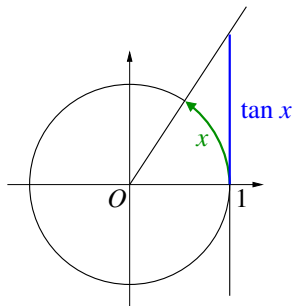
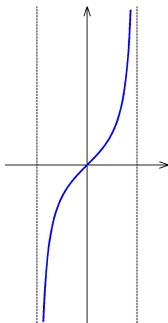


grafico di $f(x) = \tan x$

Funzione arcotangente

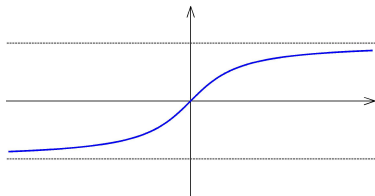
La funzione $f(x) = \tan x$ definita per $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a valori in $\mathbb{R}$ è biunivoca.

$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è la sua funzione inversa.



$$f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$$

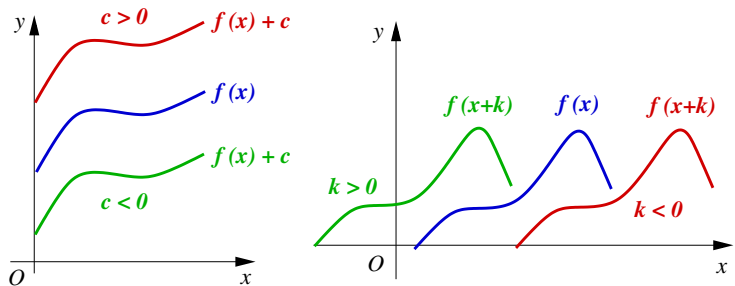
$$f(x) = \tan x$$



$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$f^{-1}(x) = \arctan x$$

Traslazioni



Traslazioni verticali:

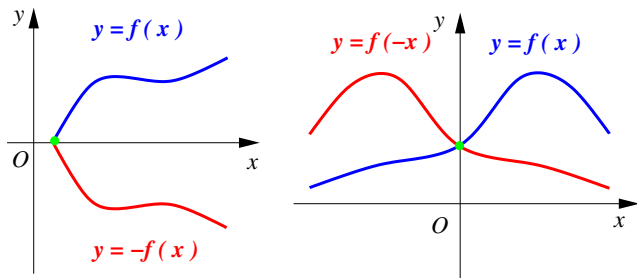
$y = f(x) + c$ traslazione verticale verso l'alto se $c > 0$, verso il basso se $c < 0$

Traslazioni orizzontali:

$y = f(x + k)$ traslazione orizzontale verso sinistra se $k > 0$, verso destra se $k < 0$

Esercizio: disegnare il grafico delle funzioni $y = 1 + \ln x$, $y = |x| - 3$,
 $y = e^x + 1$, $y = x^2 - 1$, $y = \ln(x - 1)$, $y = |x + 2|$, $y = e^{x+3}$

Riflessioni



Riflessione rispetto all'asse x :

$y = -f(x)$ i punti di intersezione con l'asse x restano invariati

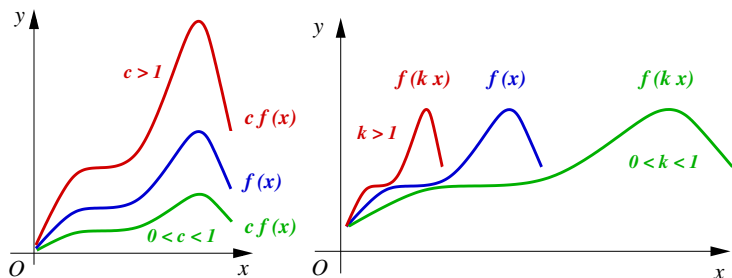
Esercizio: disegnare il grafico di $y = -|x|$, $y = -\frac{1}{x}$, $y = \ln \frac{1}{x} = -\ln x$

Riflessione rispetto all'asse y :

$y = f(-x)$ i punti di intersezione con l'asse y restano invariati

Esercizio: disegnare il grafico di $y = e^{-x}$, $y = \sqrt{-x}$

Dilatazioni



Cambio di scala sull'asse y:

$y = c \cdot f(x)$ compressione per $0 < c < 1$, dilatazione per $c > 1$

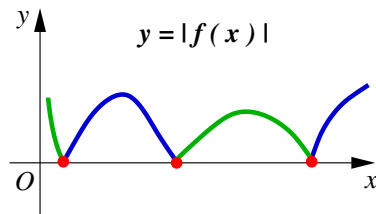
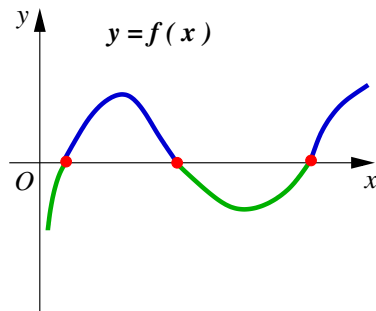
Esercizio. Disegnare i seguenti grafici: $y = 2 \sin(x)$, $y = \frac{1}{2} \sin(x)$, $y = 5e^x$

Cambio di scala sull'asse x:

$y = f(k \cdot x)$ dilatazione per $0 < k < 1$, compressione per $k > 1$

Esercizio. Disegnare i seguenti grafici: $y = \sin(2x)$, $y = \sin(\frac{1}{2}x)$, $y = e^{2x}$

Valore assoluto



$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases} \quad (\text{riflessione})$$

Nota: gli zeri della funzione restano invariati

Esercizio: disegnare il grafico di $y = |2x + 1|$, $y = |x^3|$, $y = |\ln x|$

Esercizio 1. Tracciare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{per } x \leq 0, \\ |x - 1| & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

Determinare gli eventuali punti e valori di massimo e minimo assoluti e relativi per $x \in (-\infty, 4]$.

Esercizio 2. Tracciare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & \text{per } x \leq 1, \\ \ln x & \text{per } x > 1. \end{cases}$$

Determinare gli eventuali punti e valori di massimo e minimo assoluti e relativi per $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Tracciare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 - |x| & \text{per } x \leq 2, \\ \ln(\frac{1}{2}x) & \text{per } x > 2. \end{cases}$$

Determinare gli eventuali punti e valori di massimo e minimo assoluti e relativi per $x \in [-3, +\infty)$.

Esercizio 4. Tracciare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 4x^2 & \text{per } x \leq \frac{1}{2}, \\ \ln(2x) & \text{per } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Determinare gli eventuali punti e valori di massimo e minimo assoluti e relativi per $x \in [-1, +\infty)$.

Esercizio 5. Tracciare il grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{per } x \leq 1, \\ -\ln x & \text{per } x > 1. \end{cases}$$

Determinare gli eventuali punti e valori di massimo e minimo assoluti e relativi per $x \in [-2, +\infty)$.