

Autorizzo la pubblicazione dell'esito dello scritto on-line Firma: \_\_\_\_\_

Per ciascun esercizio verrà assegnato al massimo il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta (0 se non svolto o se errato). Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta  $\geq 18$ .  
Il tempo a disposizione è di 2 ore.

1. STUDIO DI FUNZIONE: si consideri la funzione

$$0 \leq f(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ (x-1)^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

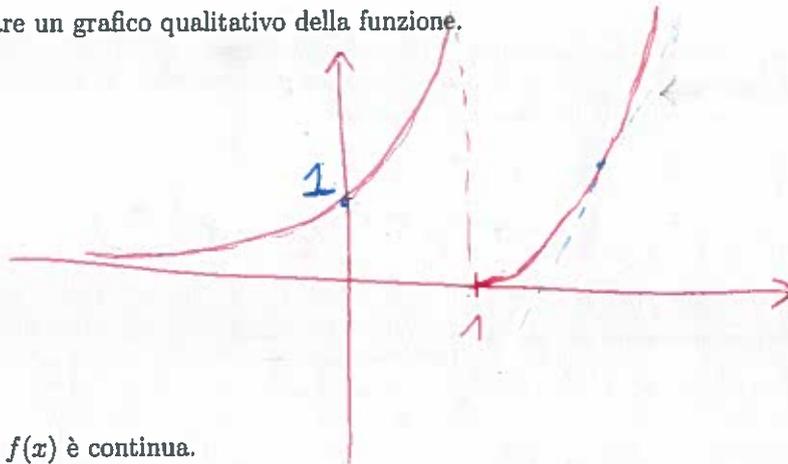
*ramo di parabola*

8 pt.
-------

a. Dire se  $f(x)$  è iniettiva e/o suriettiva.

NO NO

b. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.



c. Dire se  $f(x)$  è continua.

NO

d. Calcolare la derivata di  $f(x)$  e l'equazione della retta tangente a  $f(x)$  nel punto  $x = 2$

$\begin{cases} -2(x-1)^3 \\ 2x-2 \end{cases}$

$y = 2x + 1 - 4 = 2x - 3$

2. Si calcolino i seguenti limiti:

•  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)^2}{x^2 - 2x + 1} = 1$

•  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + e^x - 1}{2x} = 1$

•  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + 3}{x^2 - 1} =$

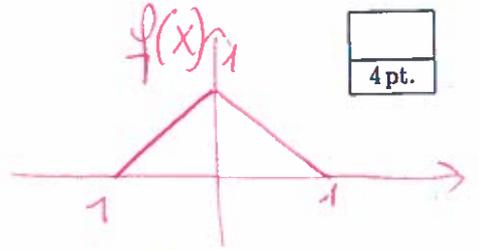
$\begin{cases} +\infty \text{ un}^- \\ -\infty \text{ un}^+ \end{cases}$

non esiste

4 pt.
-------

3. Data la variabile aleatoria  $X$  avente densità

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$



4 pt.

(a) determinarne il valore atteso  $E(X) = 0$

(b) determinarne la mediana  $a$  definita come il valore per cui  $P(X \leq a) = \frac{1}{2}$ .

$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx$   $[a=0]$

4. (a) Determinare la primitiva della funzione  $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + x^3 + 2$ .

antid(x) +  $\frac{1}{4}x^4 + 2x + K$

4 pt.

(b) Calcolare  $\int_0^1 f(x)$ .

$\frac{\pi}{4} + \frac{9}{4}$

5. Data una malattia che colpisce lo 0.1% della popolazione ed un test diagnostico per tale malattia con sensibilità del 97% e specificità del 95%, calcolare la probabilità che un individuo sia sano se il test ha dato esito positivo.

4 pt.

$P(M) = 0.001$   
 $P(M^c) = 0.999$   
 prob. individuo sano)

$P(M^c | T^+) = 98.09\%$   
 $P(M^c | T^+) = P(T^+ | M^c) / P(T^+)$  \*

$x \neq 0$   
 $x \leq -3 \cup$   
 $x \geq 3$

6. Date le funzioni  $f(x) = \sqrt{x^2-9}$  e  $g(x) = -4/x - 2$ , determinarne i rispettivi campi di esistenza, determinare le funzioni  $f \circ g$  e  $g \circ f$  e calcolare le rispettive derivate.

4 pt.

$z_1 = (f \circ g)(x) = \sqrt{\left(-\frac{4}{x} - 2\right)^2 - 9}$       $z_2 = (g \circ f)(x) = -\frac{4}{\sqrt{x^2-9}} - 2$   
 $z_1' = -\frac{8x+6}{x\sqrt{x^2-9}}$       $z_2' = \frac{4x}{(\sqrt{x^2-9})^3}$

7. Sono date due soluzioni  $S_1$  e  $S_2$  dello stesso soluto e dello stesso solvente,  $S_1$  al 20% e  $S_2$  di concentrazione incognita. Mescolando tre parti di  $S_1$  e due parti di  $S_2$  si ottiene una nuova soluzione  $S_3$  concentrata al 15%. Qual è la concentrazione di  $S_2$ ?

4 pt.

Per ottenere 6 kg di  $S_3$  quanti kg di  $S_1$  e di  $S_2$  occorre mescolare?

$S_1 \quad 3,6 \text{ Kg} = x_1$       $S_2 \quad 2,4 \text{ Kg} = x_2$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ 0.2x_1 + 0.075x_2 = 0.15 \cdot 6 \end{cases}$

\*  $P(T^+) = \underbrace{P(T^+ | M) P(M)}_{\text{SENSIBILITÀ}} + \underbrace{P(T^+ | M^c) P(M^c)}_{1 - \text{SPECIFICITÀ}} = 0.05092$