

Matematica con Elementi di Statistica (CTF) Appello Cognome:
28/09/2018 Nome:

☐ Autorizzo la pubblicazione dell'esito dello scritto on-line Firma:

Per ciascun esercizio verrà assegnato al massimo il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta (0 se non svolto o se errato). Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 .

Il tempo a disposizione è di 2 ore.

1. STUDIO DI FUNZIONE: si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{40 - x^2} + \sin^2(x)$$

8 pt.

a. Definire il campo di esistenza della funzione e dire se $f(x)$ è iniettiva e/o suriettiva. $[-2\sqrt{10}, 2\sqrt{10}]$, non è iniettiva nè suriettiva

b. La funzione presenta qualche simmetria? Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Sì, la funzione è pari.

c. Calcolare la derivata della funzione.

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{40 - x^2}} + 2 \cos(x) \sin(x)$$

d. Calcolare l'equazione della retta tangente a $f(x)$ nel punto $x = -\pi$

$$y = \frac{\pi}{\sqrt{40 - \pi^2}}x + \frac{\pi^2}{\sqrt{40 - \pi^2}} + \sqrt{40 - \pi^2}$$

2. Determinare la primitiva della funzione $f(x) = 4x^3 + \cos(2x)$ e calcolare l'integrale della funzione nell'intervallo $[0, \pi]$.

4 pt.

$$F(x) = x^4 + \frac{1}{2} \sin 2x + C \quad \int_0^\pi f(x) dx = \pi^4$$

3. Si calcolino i seguenti limiti:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x+1)^2}{x^2+1} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

4 pt.

4. Si consideri una variabile aleatoria X avente densità data da

$$f(x) = \begin{cases} \pi & 0 < x \leq \frac{1}{\pi} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

4 pt.

Tracciare il grafico di f e calcolare le seguenti quantità:

(a) la media $E(X)$ e la varianza $Var(X)$

$$\text{Media: } \frac{1}{2\pi} \quad \text{Varianza: } \frac{1}{12\pi^2}$$

(b) $P(-1 \leq X \leq \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{4}$

5. Alcuni risultati sperimentali vengono riportati in un grafico in scala semilogaritmica, trovando la retta $Y = \log_{10}(\frac{1}{5}) + x \log_{10} 2$, dove $Y = \log_{10} y$. Trovare il legame funzionale fra y e x .

$$y = \frac{1}{5} 2^x$$

4 pt.

6. (a) Date le funzioni $f(x) = \log(x)$ e $g(x) = x^2 + 1$, trovare le funzioni composte $z_1 = f \circ g = \log(1 + x^2)$ e $z_2 = g \circ f = (\log x)^2 + 1$.

4 pt.

(b) Scrivere le derivate di z_1 e z_2 .

$$z'_1 = \frac{2x}{1+x^2} \quad z'_2 = (2 \log x) \frac{1}{x}$$

7. Un'azienda produce un certo oggetto utilizzando due diverse macchine: dalla prima esce il 60% degli oggetti prodotti. Si sa inoltre che il 2% degli oggetti prodotti dalla prima macchina è difettoso. Calcolare la probabilità che un oggetto prodotto sia difettoso e sia stato prodotto dalla prima macchina.

$$P(D \cap M_1) = 0.012$$

4 pt.