

Matematica con Elementi di Statistica (CTF) Appello Cognome:
22/02/2018 Nome:

☐ Autorizzo la pubblicazione dell'esito dello scritto on-line Firma:

Per ciascun esercizio verrà assegnato al massimo il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta (0 se non svolto o se errato). Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 .

Il tempo a disposizione è di 2 ore.

1. STUDIO DI FUNZIONE: si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{1+x^2} & x \leq 1 \\ \ln x & x > 1 \end{cases}$$

8 pt.

a. Dire se $f(x)$ è iniettiva e/o suriettiva.

b. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

c. Calcolare la derivata prima di $f(x)$ e dire se è continua.

d. Calcolare il punto di minimo di $f(x)$.

2. Si calcolino i seguenti limiti:

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2 + e^{-x}) =$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x-3} =$

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} =$

4 pt.

3. Si consideri una variabile aleatoria X avente densità data da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3x - x^3) & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

4 pt.

a. Calcolare $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.

b. Calcolare $P(\frac{1}{2} \leq X \leq 1)$.

4. (a) Determinare la primitiva della funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + x^2 + 3 - e^x$.

4 pt.

(b) Calcolare $\int_0^1 f(x)$.

5. Un test diagnostico ha sensibilità¹ pari al 90% e specificità² del 70%. Un controllo di massa dà esito positivo nella metà dei casi. Qual è la probabilità che l'individuo sia malato se il test dà risultato positivo?

4 pt.

6. Dato un fenomeno descritto dalla legge $y = 10 e^{-4x}$ determinare un opportuno cambio di coordinate in modo da visualizzare una legge lineare.

4 pt.

7. La concentrazione di un isotopo radioattivo inizialmente è di 2 atomi su 1000. Dopo 120 giorni tale concentrazione si riduce a 8 atomi su 100000. Determinare il tempo di dimezzamento di questo isotopo.

4 pt.

¹La **sensibilità** di un test indica quante volte un test risulta positivo nel caso di individui malati.

²La **specificità** indica la frazione di volte in cui il test risulta negativo in individui sani.