

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 9 , se il punteggio della prima parte risulta ≥ 6 , se il punteggio della seconda parte risulta ≥ 3 , e se almeno uno fra gli esercizi 6 e 7 viene risolto correttamente. Il tempo a disposizione è 1 ora e 30 minuti.

PRIMA PARTE

1. Si consideri il seguente sistema differenziale

$$\begin{cases} x'(t) - 2y(t) + 3x(t) = 0 & x(0) = 1 \\ y'(t) - 2x(t) - 1 = 0 & y(0) = 3. \end{cases}$$

2 pt.

Applicare un passo del metodo di Eulero implicito con passo $h = 1/2$. I valori approssimati di $2x(1/2)$ e $2y(1/2)$ sono: $2x_1 =$ _____ e $2y_1 =$ _____ (i risultati sono numeri interi).

2. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$xy'(x) - 2y(x) + 2x^3 = 0 \quad (x \geq 1) \quad , \quad y(1) = 2 .$$

2 + 2 pt.

(a) Applicare un passo del metodo di Eulero esplicito con passo $h = 1/2$. Il valore approssimato di $y(3/2)$ è $u_1 =$ _____ .

(b) Applicare un passo del metodo dei trapezi con passo $h = 1/2$. Il valore approssimato di $16y(3/2)$ è $16u_1 =$ _____ (i risultati sono numeri interi).

3. Dato il parametro reale a , si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1/6 \\ a & 1/6 & a \end{pmatrix} .$$

2 pt.

Per quali valori di a la matrice A risulta invertibile ed ammette la decomposizione di Gauss $A = LU$?

Risposta: _____

4. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 2 \\ -1 & 1/2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2 pt.

Applicare un passo del metodo di Gauss-Seidel, sempre a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -1, 1)^T$. Si ottiene:
 $x_1^{(1)} =$ _____ $x_2^{(1)} =$ _____ $x_3^{(1)} =$ _____ (i risultati sono numeri interi).

SECONDA PARTE

5. Scrivere il metodo di Heun per l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy in forma normale.

3 pt.

6. Si consideri il seguente codice MATLAB.

```
function [y1 y2] = effe1(t,p)
y1=tan(pi*t)+5 ;
y2 = t.^3 - 6*t ;
if length(t)>5
    if p==1
        plot(t,y1)
    else
        plot(t,y2)
    end
end
```

1 pt.

Quali delle seguenti affermazioni sono vere? (L'esercizio si intende risolto **se e solo se** verranno crocettate **tutte e sole le risposte esatte**)

- (a) La funzione 'effe1' può ricevere come input solo un vettore e uno scalare
 - (b) La funzione 'effe1' restituisce come output sempre due scalari
 - (c) La funzione produce un grafico se l'input 't' è un vettore con 7 elementi
 - (d) y1 e y2 possono essere due vettori
 - (e) La funzione produce due grafici
7. Considerando sempre il codice MATLAB del precedente esercizio, quali delle seguenti affermazioni sono vere? (L'esercizio si intende risolto **se e solo se** verranno crocettate **tutte e sole le risposte esatte**)

3 pt.

- (a) Se $t=0$, la funzione 'effe1' restituisce i due valori $y1=5$ e $y2=0$
- (b) Se $t=[0 \ 1 \ 2]$ la funzione produce un grafico con tre punti
- (c) Se $t=[0 \ 1 \ 2]$ la funzione restituisce 2 vettori come output
- (d) Se $t=0:0.05:1$ e $p=1$ la funzione produce il grafico della funzione $\tan(\pi*t)+5$
- (e) Se $t=0:0.1:1$ e $p=2$ la funzione produce il grafico della funzione $\tan(\pi*t)+5$