Prova in itinere di OTTIMIZZAZIONE

28–4–2006

1. Sia $\{\mathbf{x}_k\}$ una successione convergente a $\mathbf{x}^*$: dare la definizione di velocità di convergenza di tipo superlineare e di ordine $\alpha > 1$.

2. Scrivere un problema di programmazione lineare in *forma standard*. Descrivere il metodo del simplesso ed illustrarne l'algoritmo (evitare il calcolo dell'inversa della matrice B).

3. In cosa consiste il metodo del simplesso *revised*?

4. Descrivere un passo del metodo di Newton–Raphson per la risoluzione di un sistema di equazioni non lineari $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{F} : \Re^n \to \Re^n$. Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza locale del metodo.

5. Discutere i limiti del metodo di Newton.

6. Scrivere la regola di Armijo per $||\mathbf{F}(\mathbf{x})||_2$ e motivarne l'applicazione.

7. Cosa si intende per strategia di tipo *line search*?

8. Sia $\mathbf{p}_k$ una direzione di discesa per $f(\mathbf{x})$ nel punto $\mathbf{x}_k$, con $f : \Re^n \to \Re$. Determinare il passo α_k con ricerca lineare esatta applicata a:

$$\min_{\alpha>0} f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{p}_k)$$

   dove $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + \mathbf{c}$ ($\mathbf{A}$ simmetrica e definita positiva). Mostrare che $\alpha_k > 0$.

9. Sia $\mathbf{F} : \Re^2 \to \Re^2$ e

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 2x_2 \\ x_2^3 - \frac{1}{x_1} \end{pmatrix}$$

   Calcolare $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ nel punto $(1,1)$ e una sua approssimazione alle differenze finite[1] con h=0.01. Commentare l'accuratezza dell'approssimazione.

10. Sia $\mathbf{x} \in \Re^2$ e $f(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$. Posto $\mathbf{x}_0 = (1,1)^T$, qual è la direzione di massima discesa in $\mathbf{x}_0$? $(1,-1)^T$ è una direzione di discesa?

[1] $\mathbf{A}_{\cdot,j} = \frac{\mathbf{F}(\overline{\mathbf{x}}+h\mathbf{e}_j)-\mathbf{F}(\overline{\mathbf{x}})}{h} \approx \mathbf{J}(\overline{\mathbf{x}})_{\cdot,j}$.