

☐ Autorizzo la pubblicazione dell'esito dello scritto on-line

Firma: _____

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 , se il punteggio della prima parte risulta ≥ 12 , se il punteggio della seconda parte risulta ≥ 6 , e se almeno due fra gli esercizi 11, 12, 13 e 14 vengono risolti correttamente. Il tempo a disposizione è 2 ore e 45 minuti.

PRIMA PARTE

1. ** Applicare un passo del metodo di Newton per risolvere l'equazione

$$3x^4 + e^{3x} - 3 = 0 \quad x \in [0, 1] .$$

2 pt.

Se x_0 è l'estremo di Fourier, allora $x_1 =$ _____ .

2. ** Si consideri la seguente formula di quadratura:

$$\int_{-2}^2 f(x) dx \approx af(-2) + bf(0) + cf(2)$$

2 + 2 pt.

Determinare i pesi a, b, c in modo che la formula sia almeno di ordine 2.

$a =$ _____ , $b =$ _____ , $c =$ _____

(b) Determinare l'ordine della formula trovata. Ordine = _____

3. ** Trovare a e b in modo tale che la funzione $f(x) = 3a\sqrt{x} + 2b$, approssimi i punti $(0, 0), (1, 2), (4, 3), (9, 2)$ nel senso dei minimi quadrati. Si ha: $a =$ _____ e $b =$ _____ .

2 pt.

4. ** Sia $P_2(x)$ il polinomio interpolatore di Lagrange relativo ai nodi $\{1/2; 1; 3/2\}$ per la funzione

$$f(x) = \frac{1 + \sin(\pi x)}{x} .$$

2 pt.

Allora $P_2(2) - f(2)$ vale _____

5. Si consideri il seguente sistema differenziale

$$\begin{cases} x'(t) - 2y(t) + 3x(t) = 0 & x(0) = 1 \\ y'(t) - 2x(t) - 1 = 0 & y(0) = 3. \end{cases}$$

2 pt.

Applicare un passo del metodo di Eulero implicito con passo $h = 1/2$. I valori approssimati di $x(1/2)$ e $y(1/2)$ sono: $x_1 =$ _____ e $y_1 =$ _____ .

6. Dato il parametro reale α , si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3\alpha \end{pmatrix} .$$

2 + 2 pt.

(a) Per quali valori di a la matrice A risulta invertibile ed ammette la decomposizione LU ?

(b) Sia $A = LU$ la decomposizione di Gauss. Allora $l_{21} + l_{31}$ vale _____

7. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2 pt.

Applicare un passo del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^T$. Si ottiene:

$$x_1^{(1)} = \underline{\hspace{2cm}} \quad x_2^{(1)} = \underline{\hspace{2cm}} \quad x_3^{(1)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

8. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2 pt.

Applicare un passo del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = (2, 3, 1)^T$. Si ottiene:

$$x_1^{(1)} = \underline{\hspace{2cm}} \quad x_2^{(1)} = \underline{\hspace{2cm}} \quad x_3^{(1)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

SECONDA PARTE

9. ** Formule di integrazione: scrivere la formula del punto medio e la formula di Cavalieri-Simpson per una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

3 pt.

10. Scrivere il metodo dei trapezi (metodo di Crank-Nicolson) per l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy in forma normale.

3 pt.

11. ** Si consideri il seguente codice MATLAB.

```
close all
xnodi=-3:3;
y=[-0.3 0.4 -1 1.2 2 -0.5 1.34] ;
figure
plot(xnodi,y,'x')
hold on
rr=polyfit(xnodi,y,1) ;
parab=polyfit(xnodi,y,2) ;
plot(-3:0.2:3,polyval(rr,-3:0.2:3))
plot(-3:0.2:3,polyval(parab,-3:0.2:3),'r')
```

1 pt.

Quali delle seguenti affermazioni sono vere? (L'esercizio si intende risolto **se e solo se** verranno crocettate **tutte e sole le risposte esatte**)

- (a) **xnodi** è un vettore riga
- (b) **xnodi** è una matrice
- (c) il grafico contiene solo una retta
- (d) il grafico contiene una parabola
- (e) **rr** è un vettore

12. ** Considerando sempre il codice MATLAB del precedente esercizio, quali delle seguenti affermazioni sono vere? (L'esercizio si intende risolto **se e solo se** verranno crocettate **tutte e sole le risposte esatte**)

- (a) **parab** è un vettore costituito da due elementi
- (b) **rr** è un vettore costituito da due elementi
- (c) l'istruzione **size(xnodi)** restituisce [1 7]
- (d) la figura contiene il grafico di una sola funzione
- (e) la figura contiene due funzioni sovrapposte
- (f) l'esecuzione del codice si blocca e segnala un errore di sintassi

3 pt.

13. Si consideri il seguente codice MATLAB.

```
A=[-2 0 1; 1 2 1; 0 -1 3] ;
b=[1 1 1]';
x=zeros(3,1) ;
K=0 ;
n=length(b) ;
invD=[-1/2 0 0; 0 1/2 0; 0 0 1/3] ;
B=eye(n)-invD*A ;
disp(invD)

while K<20
    xold=x ;
    for i=1:n
        x(i)=(b(i)-A(i,1:i-1)*xold(1:i-1)-A(i,i+1:n)*xold(i+1:n))/A(i,i) ;
    end
    K=K+1 ;
end
residuo=A*x-b ;
```

1 pt.

Quali delle seguenti affermazioni sono vere? (L'esercizio si intende risolto **se e solo se** verranno crocettate **tutte e sole le risposte esatte**)

- (a) **A** è una matrice quadrata
- (b) **A** è una matrice rettangolare
- (c) **B** è un vettore
- (d) **x** è un vettore
- (e) **size(x)** è sempre uguale a **size(xold)**

- 14.** Considerando sempre il codice MATLAB del precedente esercizio, quali delle seguenti affermazioni sono vere? (L'esercizio si intende risolto **se e solo se** verranno crocetate **tutte e sole le risposte esatte**)

3 pt.

- (a) `xold` è un vettore con elementi tutti uguali a 1
- (b) al termine dell'esecuzione del codice si ha $K=20$
- (c) al termine dell'esecuzione $K=1$
- (d) la variabile `residuo` è una matrice
- (e) il codice sopra riportato implementa il metodo di Jacobi
- (f) `residuo` è un vettore di tre elementi