

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 , se il punteggio della prima parte risulta ≥ 12 , se il punteggio della seconda parte risulta ≥ 6 , e se almeno due fra gli esercizi 12, 13, 14 e 15 vengono risolti correttamente. Il tempo a disposizione è 2 ore e 45 minuti.

PRIMA PARTE

1. ** Dato $x^{(0)} = (1, 1)^T$, si applichi il metodo di Newton al sistema

$$\begin{cases} x^2y - 3y^2 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

2 pt.

Per la prima iterata $x^{(1)} = (x_1, y_1)^T$ si ha $x_1 =$ _____ , $y_1 =$ _____

2. ** Si consideri la seguente formula di quadratura:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx af\left(-\frac{1}{4}\right) + bf(1)$$

2 + 2 pt.

Determinare i pesi a, b in modo che la formula sia almeno di ordine 1.

$a =$ _____ , $b =$ _____

(b) Determinare l'ordine della formula trovata. Ordine = _____

3. ** Trovare a e b in modo tale che la funzione $f(x) = a\sqrt{x} + b$, approssimi i punti $(0, 0), (1, 2), (4, 3), (9, 2)$ nel senso dei minimi quadrati. Si ha: $a =$ _____ e $b =$ _____ .

2 pt.

4. ** Sia $P_2(x)$ il polinomio interpolatore di Lagrange relativo ai nodi $\{0, 1, 2\}$ per la funzione

$$f(x) = \frac{2^{x-1} + 3}{x^2 + 1}.$$

2 pt.

Allora $P_2(3)$ vale _____

5. Si consideri il seguente sistema differenziale

$$\begin{cases} x'(t) - 2y(t) + 4x(t) = 0 & x(0) = 1 \\ y'(t) - 2x(t) + 1 = 0 & y(0) = 2. \end{cases}$$

2 pt.

Applicare un passo del metodo di Eulero esplicito con passo $h = 1/2$. I valori approssimati di $x(1/2)$ e $y(1/2)$ sono: $x_1 =$ _____ e $y_1 =$ _____ .

6. Dato il parametro reale a , si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & a \\ a & a & 6 \end{pmatrix}.$$

2 + 2 pt.

(a) Per quali valori di a la matrice A risulta invertibile ed ammette la decomposizione LU ?

(b) Per quali valori di a la matrice A ammette la decomposizione di Cholesky $A = BB^T$ con B triangolare inferiore ? _____

7.Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Applicare un passo del metodo di Jacobi, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = (4, -1, -3)^T$. Si ottiene:

$$x_1^{(1)} = \underline{\hspace{2cm}} \quad x_2^{(1)} = \underline{\hspace{2cm}} \quad x_3^{(1)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

2 pt.

8.Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Applicare un passo del metodo di Gauss-Seidel, a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = (-5, -2, -3)^T$. Si ottiene:

$$x_1^{(1)} = \underline{\hspace{2cm}} \quad x_2^{(1)} = \underline{\hspace{2cm}} \quad x_3^{(1)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

2 pt.

SECONDA PARTE**9. **** Enunciare il teorema di esistenza e unicità del polinomio di interpolazione lagrangiana.

3 pt.

10. Scrivere il metodo di Eulero implicito per l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy in forma normale.

3 pt.

11. ** Si consideri il seguente codice MATLAB.

```
x=0:0.02:10;
f=cos(x)+x.^2-3;
plot(x,f)
g=-sin(x)+2*x;
hold on
plot(x,g,'r')
h=f.*g ;
A=f'*g ;
```

1 pt.

Quali delle seguenti affermazioni sono vere? (L'esercizio si intende risolto **se e solo se** verranno crocettate **tutte e sole le risposte esatte**)

- (a) La variabile **f** è un vettore che contiene 3 elementi
- (b) La variabile **f** è un vettore con almeno 10 elementi
- (c) Il codice produce due grafici sovrapposti
- (d) Il codice produce due grafici in due figure diverse

12. ** Considerando sempre il codice MATLAB del precedente esercizio, quali delle seguenti affermazioni sono vere? (L'esercizio si intende risolto **se e solo se** verranno crocettate **tutte e sole le risposte esatte**)

- (a) `size(g)=size(f)`
- (b) **A** è una matrice
- (c) **A** è un vettore
- (d) **h** è uno scalare
- (e) **h** è un vettore

3 pt.

13. Si consideri il seguente codice MATLAB (**N.B.:** si supponga che la funzione `@effe-cauchy` sia stata definita a parte).

```
clear
met=input('Inserire 0 oppure 1:  ') ;
t0=1 ;
T=5 ;
h=0.01 ;
effefun=@effe-cauchy ;

t=t0:h:T ;
N=length(t) ;
u=zeros(N,1) ;
u(1)=0;

if met==0
    disp('Eulero Esplicito')
    for i=1:N-1
        u(i+1)=u(i)+h*effefun(t(i),u(i)) ;
    end
else
    disp('Metodo non implementato')
end
```

1 pt.

Quali delle seguenti affermazioni sono vere? (L'esercizio si intende risolto **se e solo se** verranno crocettate **tutte e sole le risposte esatte**)

- (a) Il codice sopra genera un errore
- (b) Il codice genera due vettori
- (c) `size(t)=[1 401]`
- (d) `size(t)=[1 20]`
- (e) Il codice visualizza sul monitor il valore di **N**

- 14.** Considerando sempre il codice MATLAB del precedente esercizio, quali delle seguenti affermazioni sono vere? (L'esercizio si intende risolto **se e solo se** verranno crocetate **tutte e sole le risposte esatte**)

3 pt.

- (a) Il codice non visualizza i valori di `i`
- (b) Il ciclo `for` non viene eseguito se la variabile `met` è uguale a 1
- (c) Il ciclo `for` viene sempre eseguito
- (d) `max(t)=5`
- (e) Il codice genera il grafico di `u`