

Autorizzo la pubblicazione on-line dell'esito dello scritto Firma: _____

Per ciascun esercizio verrà assegnato al massimo il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta (0 se non svolto o se errato). Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 .

Il tempo a disposizione è di 2 ore.

1. STUDIO DI FUNZIONE: si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1+x^2}{3x^2}.$$

8 pt.

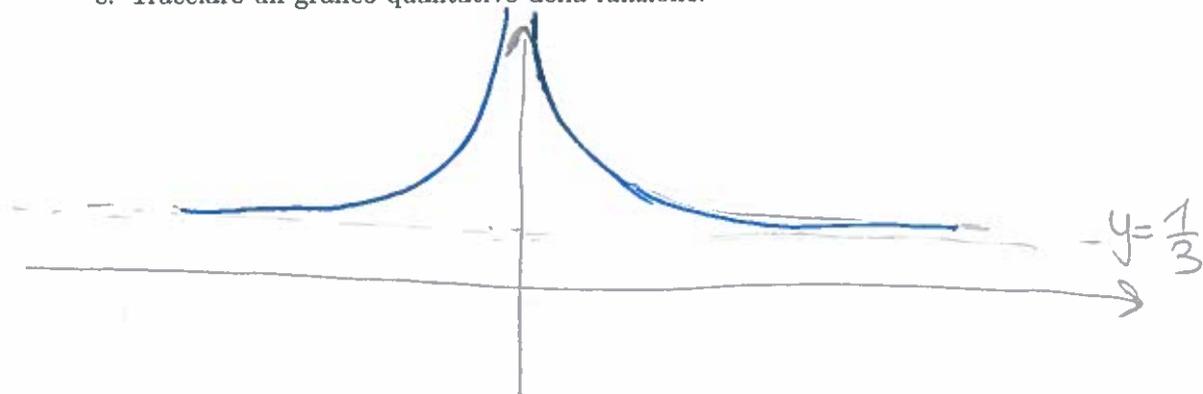
a. Determinare dominio e codominio di f .

$D: \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $f(x) > \frac{1}{3} \rightarrow (\frac{1}{3}, \infty)$

b. Calcolare la derivata di f .

$$f'(x) = -\frac{2}{3x^3}$$

c. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.



d. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione in $x=1$.

$t(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ $(f(1) = \frac{2}{3}, f'(1) = -\frac{2}{3})$

2. Si calcolino i seguenti limiti:

$\lim_{x \rightarrow 0} (2+x)e^{-x^2} = 2$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 2x^2 + 5}{3x^4 + x^2} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x^2} = \text{[crossed out]}$

4 pt.

3. Si consideri una variabile aleatoria X avente densità data da

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}$$

4 pt.

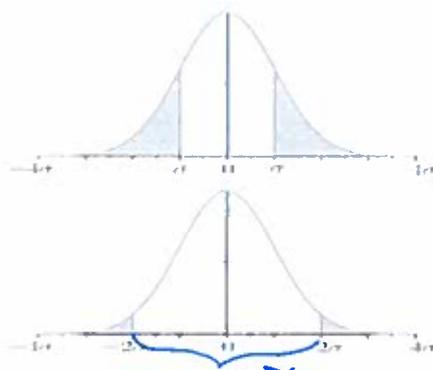
← *Gaussiana*

Tracciare il grafico di f e calcolare le seguenti quantità:

(a) la media $\mu(X)$ e la varianza σ^2

$$\mu(X) = 2 \quad \sigma^2 = 1$$

(b) Calcolare la probabilità $P(0 \leq X \leq 4)$ (N.B.: si consideri la figura 1 che rappresenta una densità di probabilità con media pari a zero e deviazione standard σ)



$$P \approx 0.953...$$

Figure 1: Nel primo grafico è evidenziata la regione che corrisponde a una probabilità pari a circa 0.32, nel secondo grafico l'area colorata corrisponde a una probabilità di 0.046 circa.

4. Alcuni risultati sperimentali vengono riportati in un grafico in scala semilogaritmica, trovando la retta $Y = \log_{10}(\frac{1}{5}) + x \log_{10} 2$, dove $Y = \log_{10} y$. Trovare il legame funzionale fra y e x .

4 pt.

$$y = \frac{1}{5} \cdot 2^x$$

5. (a) Determinare la primitiva della funzione $f(x) = \sin(2x) + e^{3x} + x^4$.

4 pt.

$$-\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} e^{3x} + \frac{1}{5} x^5 + K$$

(b) Calcolare $\int_0^1 f(x)$.

$$-\frac{1}{2} \cos 2 + \frac{1}{3} e^3 + \frac{11}{30}$$

6. Una malattia colpisce l'1% della popolazione. Un test diagnostico risulta positivo su 99,2% degli individui malati e su 0,5% degli individui sani. Calcolare la probabilità che un individuo sia malato se il test è risultato positivo.

4 pt.

$$P(M|T^+) \approx 66,7\%$$

7. In un esperimento, all'istante $t = 0$ la numerosità di una colonia batterica è data da $N_0 = 5000$ batteri, e dopo 45 minuti è pari a 10000. Supponendo una crescita malthusiana ($N(t) = N_0 R^t$, con t misurato in ore), determinare il numero di batteri dopo un'ora dall'inizio dell'esperimento.

4 pt.

$$N(1) = 12599 \quad (R = \sqrt[3]{16})$$