

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 , se il punteggio della prima parte risulta ≥ 12 , se il punteggio della seconda parte risulta ≥ 6 , e se almeno due fra gli esercizi 12, 13, 14 e 15 vengono risolti correttamente. Il tempo a disposizione è 2 ore e 45 minuti.

PRIMA PARTE

1. ** Dato $x^{(0)} = (2, 3)^T$, si applichi il metodo di Newton al sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2 \end{cases}$$

2 pt.

Per la prima iterata $x^{(1)} = (x_1, y_1)^T$ si ha $x_1 =$ _____ e $y_1 =$ _____ (i risultati sono numeri interi)

2. ** Sia

$$E = \int_{-1}^2 \left[3 \arctg(x - 1/2) + 2(x^2 - \sin(\pi x)) \right] dx ,$$

2 pt.

e sia A_{CS} il valore approssimato dell'integrale ottenuto usando la formula di Cavalieri-Simpson. Allora A_{CS} vale _____ (il risultato è un numero intero).

3. ** Si consideri la formula di quadratura

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \omega_1 f(0) + 2\omega_2 f(1/2) + 3\omega_3 f(1) .$$

2 pt.

Determinare i parametri reali ω_1 , ω_2 e ω_3 in modo che la formula di quadratura abbia ordine di precisione almeno 2. Risulta:

$12\omega_1 =$ _____ , $6\omega_2 =$ _____ , $18\omega_3 =$ _____ (i risultati sono numeri interi).

4. ** Determinare a e b in modo che la funzione

$$g(x) = a(\sin(\pi x))^2 + b(\cos(\pi x))^2$$

2 pt.

approssimi i punti $(-3/2, 1)$, $(-1, -1)$, $(-1/2, 2)$, $(0, 4)$, $(1/2, 3)$, $(1, 3)$, $(3/2, 6)$ nel senso dei minimi quadrati. Si ha: $a =$ _____ e $b =$ _____ (i risultati sono numeri interi).

5. ** Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{|x| + 2} .$$

2 pt.

Sia $P_2(x)$ il polinomio interpolatore di Lagrange di $f(x)$, relativo ai nodi $\{-1, 0, 2\}$. Allora $36 P_2(1)$ vale _____ (il risultato è un numero intero).

6. Si consideri il seguente sistema differenziale

$$\begin{cases} x'(t) - 2y(t) + 3x(t) = 0 & x(0) = 1 \\ y'(t) - 2x(t) - 1 = 0 & y(0) = 3. \end{cases}$$

2 pt.

Applicare un passo del metodo di Eulero implicito con passo $h = 1/2$. I valori approssimati di $2x(1/2)$ e $2y(1/2)$ sono: $2x_1 =$ _____ e $2y_1 =$ _____ (i risultati sono numeri interi).

7. Si consideri il seguente problema di Cauchy

2 + 2 pt.

$$xy'(x) - 2y(x) + 2x^3 = 0 \quad (x \geq 1) \quad , \quad y(1) = 2 .$$

(a) Applicare un passo del metodo di Eulero esplicito con passo $h = 1/2$. Il valore approssimato di $y(3/2)$ è $u_1 =$ _____ .

(b) Applicare un passo del metodo dei trapezi con passo $h = 1/2$. Il valore approssimato di $16y(3/2)$ è $16u_1 =$ _____ (i risultati sono numeri interi).

8. Dato il parametro reale
- a
- , si consideri la matrice

2 pt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1/6 \\ a & 1/6 & a \end{pmatrix} .$$

Per quali valori di a la matrice A risulta invertibile ed ammette la decomposizione di Gauss $A = LU$?

Risposta: _____

9. Si consideri il sistema lineare
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
- , con

2 pt.

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 & 2 \\ -1 & 1/2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Applicare un passo del metodo di Gauss-Seidel, sempre a partire da $\mathbf{x}^{(0)} = (1, -1, 1)^T$. Si ottiene:
 $x_1^{(1)} =$ _____ $x_2^{(1)} =$ _____ $x_3^{(1)} =$ _____ (i risultati sono numeri interi).

SECONDA PARTE

10. ** Si consideri il metodo di Newton per la ricerca delle radici di un'equazione non lineare per un'opportuna funzione regolare
- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
- . Dare la definizione di estremo di Fourier.

3 pt.

11. Scrivere il metodo di Heun per l'approssimazione della soluzione di un problema di Cauchy in forma normale.

3 pt.

12. ** Si consideri il seguente codice MATLAB.

```
nmax=10 ;
x=input('Inserisci un valore compreso tra -2 e -1')
for i=1:nmax
    xnew = x - (x^2 - 5 * x + 1)/(2 * x - 5) ;
    delta=abs(x-xnew) ;
    x=xnew ;
end
disp(x)
f = x^2 - 5 * x + 1;
disp(f)
```

1 pt.

Quali delle seguenti affermazioni sono vere? (L'esercizio si intende risolto **se e solo se** verranno crocettate **tutte e sole le risposte esatte**)

- (a) Il codice sopra genera un vettore **x** con 10 elementi
 - (b) Il codice sopra genera un vettore **f**
 - (c) Il codice effettua 10 iterazioni del metodo di Newton
 - (d) Il codice visualizza sul monitor il valore di **delta**
 - (e) Il codice visualizza sul monitor il valore di **x**
13. ** Considerando sempre il codice MATLAB del precedente esercizio, quali delle seguenti affermazioni sono vere? (L'esercizio si intende risolto **se e solo se** verranno crocettate **tutte e sole le risposte esatte**)
- (a) Il codice non visualizza i valori di **i**
 - (b) Il ciclo '**for**' si arresta se **x=-1**
 - (c) Se **xnew=0** allora **delta<0**
 - (d) Il codice genera il grafico della funzione **f = x² - 5x + 1**
 - (e) La variabile **delta** assume sempre valori positivi
 - (f) La variabile **delta** assume sempre valori maggiori di 1

3 pt.

14. Si consideri il seguente codice MATLAB.

```
function [y1 y2] = effe1(t,p)
y1=tan(pi*t)+5 ;
y2 = t.^3 - 6 * t ;
if length(t)>5
    if p==1
        plot(t,y1)
    else
        plot(t,y2)
    end
end
```

1 pt.

Quali delle seguenti affermazioni sono vere? (L'esercizio si intende risolto **se e solo se** verranno crocettate **tutte e sole le risposte esatte**)

- (a) La funzione '**effe1**' può ricevere come input solo un vettore e uno scalare
- (b) La funzione '**effe1**' restituisce come output sempre due scalari
- (c) La funzione produce un grafico se l'input '**t**' e' un vettore con 7 elementi
- (d) **y1** e **y2** possono essere due vettori
- (e) La funzione produce due grafici

- 15.** Considerando sempre il codice MATLAB del precedente esercizio, quali delle seguenti affermazioni sono vere? (L'esercizio si intende risolto **se e solo se** verranno crocetate **tutte e sole le risposte esatte**)

3 pt.

- (a) Se $t=0$, la funzione 'effe1' restituisce i due valori $y_1=5$ e $y_2=0$
- (b) Se $t=[0 \ 1 \ 2]$ la funzione produce un grafico con tre punti
- (c) Se $t=[0 \ 1 \ 2]$ la funzione restituisce 2 vettori come output
- (d) Se $t=0:0.05:1$ e $p=1$ la funzione produce il grafico della funzione $\tan(\pi \cdot t)+5$
- (e) Se $t=0:0.1:1$ e $p=2$ la funzione produce il grafico della funzione $\tan(\pi \cdot t)+5$