

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 , se il punteggio della prima parte risulta ≥ 12 , se il punteggio della seconda parte risulta ≥ 6 , e se almeno due fra gli esercizi 10, 11, 12 e 13 vengono risolti correttamente. È comunque facoltà del docente proporre allo studente se vuole sostenere l'orale qualora lo consenta lo svolgimento della prova scritta (punteggio totale ≥ 18).

Il tempo a disposizione è 2 ore e 45 minuti.

PRIMA PARTE

1. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2 + 2 pt.

(a) Scrivere la matrice di iterazione del metodo di Jacobi $B_J = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Scrivere il vettore $x^{(1)}$ risultante da un passo del metodo di Jacobi per questo sistema partendo dal vettore $x^{(0)} = e_1 = (1, 0, 0, 0)^T$.

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Scrivere i primi due passi x_1 e x_2 del metodo di bisezione per approssimare lo zero della funzione $f(x) = xe^{-x} + e$ nell'intervallo $[-2, 1]$:

(a) $x_1 = \underline{-1/2}$, $x_2 = \underline{-5/4}$.

(b) Scrivere il generico passo n -esimo del metodo di Newton applicato allo stesso problema:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n e^{-x_n} + e}{e^{-x_n}(1 - x_n)}$$

2 + 2 pt.

3. Approssimare l'integrale definito

$$\int_{-3}^3 (e^{-x^2} + 1) dx$$

2 pt.

con la formula di quadratura del punto medio composta sui tre intervalli $[-3, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, 3]$.

Il risultato vale: $\underline{8 + 4e^{-4}}$

4. Dato il sistema non lineare

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0 \\ x - y^2 - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

2 pt.

applicare un passo del metodo di Newton a partire dal punto $(0, 1)$. Il risultato vale: $\underline{(7/6, 5/6)}$

5. Scrivere il polinomio interpolatore di Lagrange relativo ai punti $(-1, 1)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$.

$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2$$

2 pt.

6. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = t^2 + \frac{y(t)}{t+1} \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

2 + 2 pt.

(a) Determinare il valore approssimato di $y(2)$ ottenuto applicando un passo del metodo dei trapezi. Il risultato vale: 3

(b) Determinare il valore approssimato di $y(3/2)$ ottenuto applicando un passo del metodo di Eulero esplicito. Il risultato vale: 1/2

7. Determinare la retta di regressione $r(x)$ che approssima i punti $(1, 1/2)$, $(2, 0)$, $(3, -1/2)$, $(4, 1)$, $(5, 3/4)$ nel senso dei minimi quadrati.

Si ottiene $r(x) = -1/10 + 3/20 x$

2 pt.

SECONDA PARTE

8. Definire la soluzione nel senso dei minimi quadrati di un sistema lineare sovradeterminato $Ax = b$, con A matrice $m \times n$ con $m > n$, e descrivere un metodo per la risoluzione numerica di tale sistema.

Soluzione:

La soluzione nel senso dei minimi quadrati è data da:

$$x^* = \arg \min_x \|Ax - b\|^2$$

ed è unica se A ha rango massimo, cioè n .

Un *metodo* di risoluzione è dato dalla soluzione del sistema delle equazioni normali: $A^T A x = A^T b$.

Un *esempio* di questo tipo di problema è il calcolo della retta di regressione per un insieme di m punti: in questo caso si ha $n = 2$ e il vettore delle incognite x contiene i coefficienti della retta di regressione.

9. Descrivere il metodo di Eulero Implicito enunciando a quale problema viene applicato.

Soluzione:

Il metodo di Eulero Implicito consente di approssimare la soluzione di un problema di Cauchy (e di un sistema di equazioni differenziali). Dato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

con $t \in [t_0, T]$ e $f(t, y(t))$ che gode di opportune proprietà. Dato il passo di discretizzazione $h > 0$, con il metodo di Eulero Implicito si ottiene:

$$u_{n+1} = u_n + h f(t_{n+1}, u_{n+1}) \quad n = 0, 1, \dots$$

con $u_0 = y_0$. E vale: $u_n \approx y(t_n)$, $t_{n+1} - t_n = h$.

3 pt.

10. Si consideri il seguente codice MATLAB.

```
clear all
A=10*rand(5)+eye(5);
[L,U,P]=lu(A);
e1=norm(L*U-A);
e2=norm(L*U-P*A);
```

Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

- (a) A è una matrice 10×10
- ☒ (b) A è una matrice 5×5
- ☒ (c) L è una matrice triangolare inferiore
- ☒ (d) U è una matrice triangolare superiore
- (e) P è una matrice diagonale

11. Considerando sempre il codice MATLAB del precedente esercizio, quali delle seguenti affermazioni sono vere?

- (a) e1 è un vettore colonna
- ☒ (b) e1 è uno scalare
- (c) e1 ed e2 sono dell'ordine della precisione di macchina
- ☒ (d) In generale solo e2 è dell'ordine della precisione di macchina
- ☒ (e) il codice dimostra che la fattorizzazione LU di Matlab opera la tecnica di pivoting parziale

12. Si consideri il seguente codice MATLAB.

```
clear all
x=0:0.1:5;
y=exp(x)+x.^2;
plot(x,y)
v=x.*y;
a=x*y';
hold on
plot(x,v)
```

Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

- ☒ (a) x è un vettore riga
- (b) x è uno scalare
- (c) y è uno scalare
- ☒ (d) v è un vettore riga
- ☒ (e) a è uno scalare

13. Considerando sempre il codice MATLAB del precedente esercizio, quali delle seguenti affermazioni sono vere?

- ☒ (a) x e y hanno la stessa dimensione
- ☒ (b) v e y hanno la stessa dimensione
- ☒ (c) la figura contiene due grafici
- (d) v-y è un vettore di 0
- (e) l'istruzione a+y dà un errore