

Per ognuna delle seguenti domande, verrà assegnato il punteggio indicato sulla destra in caso di risposta corretta, oppure 0 punti in caso di risposta sbagliata o non data. Si supera la prova scritta se il punteggio totale risulta ≥ 18 , se il punteggio della prima parte risulta ≥ 12 , se il punteggio della seconda parte risulta ≥ 6 , e se almeno due fra gli esercizi 10, 11, 12 e 13 vengono risolti correttamente. È comunque facoltà del docente proporre allo studente se vuole sostenere l'orale qualora lo consenta lo svolgimento della prova scritta (punteggio totale ≥ 18).

Il tempo a disposizione è 2 ore e 45 minuti.

PRIMA PARTE

1. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & -3 & 5 \end{pmatrix},$$

2 + 2 pt.

dove $\beta \in \mathbb{R}$.

- (a) Per quali valori di β il metodo di Jacobi converge? $|\beta| < 5$

- (b) Posto $\beta = 2$ determinare la fattorizzazione $A = LU$. $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

2. Scrivere l'iterata del metodo di Newton per approssimare lo zero della funzione $f(x) = e^{-x} - \log(x)$ dove $x > 0$:

2 + 2 pt.

- (a) $x_{n+1} = x_n + \frac{e^{-x_n} - \log(x_n)}{e^{-x_n} + 1/x_n}$, $n = 0, 1, \dots$ e x_0 dato.

- (b) Quindi calcolare un passo di tale metodo partendo da $x_0 = 1$. Si trova $x_1 = \frac{e+2}{e+1}$

3. Approssimare l'integrale definito

$$\int_{-3}^3 (e^{-x^2} + 1) dx$$

2 pt.

con la formula di quadratura del punto medio composta sui tre intervalli $[-3, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, 3]$.

Il risultato vale: $8 + 4e^{-4}$

4. Data la seguente formula di quadratura:

$$\int_{-1}^2 f(x) dx \approx \omega_1 f(-1) + \omega_2 f(1/2) + 2\omega_3 f'(2).$$

2 pt.

determinare i parametri reali ω_1 , ω_2 e ω_3 in modo che la formula di quadratura abbia ordine di precisione massimo. Risulta: $\omega_1 = \underline{1/3}$, $\omega_2 = \underline{8/3}$, $\omega_3 = \underline{1/4}$.

5. Dato il sistema differenziale:

$$\begin{cases} x'(t) = e^{3(t-1/2)} + 2y(t) & x(0) = \frac{1}{2} \\ y'(t) = \frac{1}{t^2 + 1} + x(t) & y(0) = -1 \end{cases}$$

2 pt.

applicare un passo del metodo di Eulero Implicito con passo $h = 1/2$. Si ottengono i valori approssimati di $x(1/2)$ e $y(1/2)$ pari a $u_1 = \underline{4/5}$ $v_1 = \underline{-1/5}$ rispettivamente.

6. (a) Trovare la parabola $p_2(x)$ che interpola la funzione

$$f(x) = \frac{x-2}{x+2}, \quad \text{con } x \neq -2$$

2 + 2 pt.

nei nodi $\{0, 1, 2\}$. $p_2(x) = \underline{\quad -1/6 x^2 + 5/6 x - 1 \quad}$.

- (b) Il valore assoluto dell'errore di interpolazione nel punto $x = -1$ vale $|err(-1)| = \underline{\quad 1 \quad}$.

7. Considerata la funzione dell'esercizio precedente, determinare la retta di regressione $r(x)$ relativa ai punti $(0, f(0))$, $(1, f(1))$, $(2, f(2))$.

Si ottiene $r(x) = \underline{\quad 1/2 x - 17/18 \quad}$

2 pt.

SECONDA PARTE

8. Data la generica formula di quadratura $\sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i) \approx \int_a^b f(x) dx$ dove $x_i \in [a, b]$, scrivere cosa si intende per ordine di precisione p della formula.

Soluzione:

$$p \text{ è il massimo intero } \geq 0 \text{ t.c. } \sum_{i=1}^n \omega_i x_i^k = \int_a^b x^k dx \quad \forall k = 0, 1, \dots, p$$

3 pt.

9. Enunciare una **condizione necessaria e sufficiente** per la convergenza di un generico metodo iterativo di splitting per la risoluzione di un sistema lineare $Ax = b$.

Soluzione:

Posto $A = M - N$, C.N. e S. di convergenza dei metodi iterativi di splitting è che il raggio spettrale di B sia < 1 dove B è la matrice di iterazione data da $M^{-1}N$.

3 pt.

10. Si consideri il seguente codice MATLAB.

```
clear all
close all
x=[0 1 2];
f = (x-2)./(x+2);
p=polyfit(x,f,2);
xx=[-1:0.01:2];
ff = (xx-2)./(xx+2);
pp = polyval(p,xx);
plot(xx,pp,'r',xx,ff,'k')
hold on
plot(x,f,'o')
```

1 pt.

Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

- (a) x è un vettore colonna
- ☒ (b) x è vettore riga
- (c) f è uno scalare
- (d) la figura contiene solo il grafico di un polinomio
- ☒ (e) p è un vettore

11. Considerando sempre il codice MATLAB del precedente esercizio, quali delle seguenti affermazioni sono vere?

- ☒ (a) p è un vettore costituito da 3 elementi
- (b) p è un vettore costituito da 2 elementi
- (c) f ed ff sono vettori della stessa lunghezza
- ☒ (d) il codice costruisce e visualizza un polinomio interpolatore di grado 2
- ☒ (e) la figura contiene il grafico di 2 funzioni e di 3 nodi di interpolazione
- (f) l'istruzione $p = \text{polyfit}(x,f,1)$ dà come risultato un errore

3 pt.

12. Si consideri il seguente codice MATLAB.

```
function out=f_mat(n)
A=zeros(n) ;
out=0 ;
for i=1:n
    A(i,1)=i-2;
end
for j=2:n
    A(1,j) = j^2 ;
    for i=2:n
        A(i,j) = A(1,j) * A(1,j - 1);
    end
end
v=A(n,:) ;
for i=1:n
    if v(i) > 0
        out=out+v(i) ;
    end
end
```

1 pt.

Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

- ☒ (a) A è una matrice quadrata
- (b) A è una matrice rettangolare
- ☒ (c) v è un vettore
- (d) out è un vettore

(e) il codice visualizza il vettore v

☒ (f) out è uno scalare

13. Considerando sempre il codice MATLAB del precedente esercizio, quali delle seguenti affermazioni sono vere?

☒ (a) l'output della funzione è sempre positivo o nullo

(b) la matrice A è triangolare inferiore

(c) il codice sopra riportato implementa la risoluzione di un sistema lineare

(d) il codice sopra riportato implementa il metodo di Jacobi

☒ (e) se $n=2$ $out=0$

(f) se $n=3$ l'output della funzione è nullo

3 pt.