Appunti sulle SERIE NUMERICHE

Michele Bricchi

In queste note informali parleremo di *serie numeriche*, fornendo i criteri standard di convergenza che si è soliti introdurre in una trattazione elementare della materia. Non daremo quasi nessuna dimostrazione dei fatti che enunceremo (proposizioni, criteri e così via) ma cercheremo di illustrarne con molti esempi l'impiego.

1. Introduzione: Achille e la tartaruga

Supponiamo che Achille ed una tartaruga disputino una gara di corsa. Achille corre veloce, diciamo con velocità $4\,m/s$, mentre la tartaruga corre alla (irrealistica) velocità di $1\,m/s$. Si concedono allora alla tartaruga $4\,m$ di vantaggio.
Ora, quando partono Achille copre la distanza di $4\,m$ in $t_0 = 1\,s$. La tartaruga in questo lasso di tempo si è però spostata di un 1 metro. Achille copre quella distanza in $t_1 = 1/4\,s$, e tuttavia ancora la tartaruga gli sfugge, dato che in questo tempo essa avanza ancora di $1/4$ di metro.
Allora Achille avanza di $1/4$ di metro in $t_3 = 1/16\,s$. Ma la tartaruga è già avanzata di $1/16$ di metro ...
Insomma Achille nel tempo (espresso in secondi)

$$t = t_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_k = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^k} \tag{1}$$

si trova distante $1/4^k$ metri dalla tartaruga. Ora è ben vero che questa distanza diventa irrisoriamente piccola, al crescere di k, tuttavia essa non è mai nulla. Per cui dovremmo concludere, come Zenone, che Achille non raggiungerà mai la tartaruga in un tempo finito, dato che questo dovrebbe essere dato dalla "somma infinita" ottenuta dalla (1), sommando tutti i tempuscoli t_k.

Il che è paradossale, perché seguendo un altro ragionamento, troviamo invece che Achille incontra (e supera) il rettile. Ecco come: lo spazio (in metri) percorso da Achille in t secondi è (spazio percorso=velocità $\times$ tempo)

$$s_A = 4 \cdot t.$$

Lo spazio percorso dalla tartaruga è, del tutto similmente,

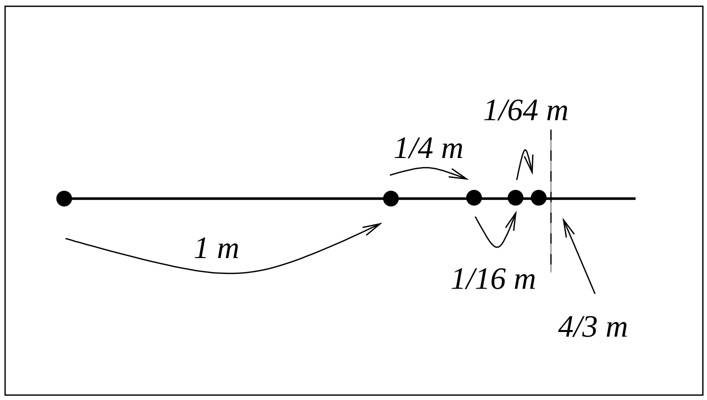
$$s_T = 1 \cdot t.$$

Contando che si dà vantaggio di $4\,m$ alla tartaruga avremo che Achille e la tartaruga si incontreranno se e solo se esiste t tale che

$$s_A = s_T + 4, \qquad \text{cioè}, \qquad 4t = t + 4.$$

L'equazione cui siamo pervenuti è elementare ed ha per soluzione

$$t = \frac{4}{3}\,s. \tag{2}$$



Le argomentazioni di Zenone sono ineccepibili, all'infuori dell'argomento finale: "dato che il tempo di incontro si presenta come somma di infiniti tempi, si deduce che esso avverà in un tempo infinito."

Come invece vedremo, la "somma infinita" o, più propriamente, la *serie*

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots$$

non vale affatto $+\infty$, ma vale $4/3$, guarda caso, proprio il tempo che abbiamo trovato con un elementare ragionamento fisico nella (2).

Nelle sezioni che seguiranno daremo un impianto rigoroso alla questione che qui sta alla base del paradosso:

Come posso sommare tutti i termini di una succesione?

2. Definizione di serie

Cominciamo dunque con il precisare il concetto di *serie*.
Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ si costruisce la cosiddetta *successione delle ridotte* associata ad $\{a_n\}$ come segue:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots & \qquad \vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Dunque $\{s_n\}$ è la successione delle somme parziali dei termini della successione di partenza $\{a_n\}$.
Una volta che si è costruita la successione $\{s_n\}$ ci si chiede se questa ammette limite. In tal modo, per definizione, *si sta studiando il comportamento della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

Si osservi che la scrittura (1) è espressiva nel seguente senso: se scriviamo

$$\sum_{n=1}^{k} a_n$$

intendiamo $a_1+a_2+\cdots+a_k$. Ovvero k sono i termini sommati. Scrivendo ∞ al posto di un numero finito si intende sottolineare che vi è un passaggio al limite, cioè che si prende la somma di tutti i termini a_n, nel senso precisato sopra.

Si hanno evidentemente tre casi possibili:

1) *il limite L di $\{s_n\}$ esiste finito:*	la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge ed ha per somma L;
2) *la successione $\{s_n\}$ ha limite uguale a $+\infty$ o $-\infty$:*	la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge a $+\infty$ o a $-\infty$, rispettivamente;
3) *la successione $\{s_n\}$ non ha limite:*	la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è oscillante.

Ad esempio, se $a_n = n$, allora s_n è uguale alla somma dei primi n numeri naturali: $s_1 = 1$, $s_2 = 3$, $s_3 = 6$, e così via. In questo caso particolare si sa con esattezza cosa mettere al posto della locuzione "e così via" appena usata: si può infatti dimostrare per induzione che

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbf{N}.$$

Pertanto, si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = +\infty,$$

oppure si dice che la serie data diverge.

Purtroppo questa situazione rosea nella quale siamo incappati è da ritenersi rara: il più delle volte, assegnata la successione $\{a_n\}$, non riusciremo a scrivere esplicitamente la formula che lega s_n a n.
Ad esempio, se $a_n = 1/n$, sappiamo che $s_1 = 1$, $s_2 = 3/2$, $s_3 = 11/6$ $\ldots$, ma non riusciamo a scrivere la formula generale che lega esplicitamente s_n a n e quindi riesce difficile stabilire il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Vedremo più in là che questa serie diverge a $+\infty$, anche se forse il lettore ha formulato in proposito una congettura diversa.

In effetti, vedremo che esistono alcuni *criteri* che, se usati con cura, possono aiutare a stabilire il comportamento di una data serie piuttosto facilmente, e di più non vorremo: quando avremo stabilito se una serie converge avremo già raggiunto lo scopo. L'eventuale richiesta successiva, e cioè "a cosa converge la serie data?" esula da una trattazione elementare.

▫ ▫ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ▫ ▫

3. Condizione necessaria

La prima fondamentale condizione che si ha è la seguente:

Condizione Necessaria (CN). *Data una successione* $\{a_n\}$, *affinché la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converga è necessario (ma non sufficiente) che*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dimostrazione. La dimostrazione di questo fatto è banale: si ha

$$a_n = s_n - s_{n-1}, \qquad \text{per } n = 2, 3, \ldots$$

Dato che stiamo assumendo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, sappiamo per definizione che $\{s_n\}$, e dunque anche $\{s_{n-1}\}$ convergono ad un limite finito. Allora la loro differenza, che è per l'appunto $\{a_n\}$, tende a zero. $\square$

Si osservi che la struttura logica dell'enunciato è dunque la seguente

$$\text{SE} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{converge,} \quad \text{ALLORA} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0\,, \tag{$\diamondsuit$}$$

oppure (e questa è la forma più interessante) si ha del tutto equivalentemente

$$\text{SE} \quad \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{NON è nullo,} \quad \text{ALLORA} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{NON converge.}$$

In altre parole tale criterio dà qualche informazione solo se $\lim_{n\to\infty} a_n$ non è uguale a zero (cioè o non esiste, oppure vale $\pm\infty$, oppure è finito ma non vale 0). In tal caso infatti si può subito concludere che la serie data non converge (pertanto o oscilla o diverge).
Esempi di serie non convergenti sono allora date da

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^7, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 7^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n+9}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{4n+8},$$

infatti i termini generali a_n di volta in volta scelti non hanno limite nullo, al tendere di n all'infinito.

L'**errore ingenuo** che talora si commette consiste nel rovesciare l'implicazione contenuta nella frase ($\diamondsuit$), ovvero dire "se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge". Questa frase è FALSA.
Se infatti il termine generale a_n fosse infinitesimo, allora fino a questo punto *non si può concludere nulla sul comportamento della serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Vedremo, ad esempio, che le due serie seguenti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

sono, rispettivamente, divergente e convergente ed entrambe hanno termine generale infinitesimo.

Fino ad ora non abbiamo fatto nessuna ipotesi sulla successione $\{a_n\}$ e pertanto la condizione (CN) vale in tutta generalità. Molti dei criteri che ora vedremo valgono invece per una classe particolare di serie.

▫ ▫ □ □ □ □ □ ▫ ▫

4. Serie a termini positivi

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è detta *a termini positivi* quando esiste un indice $N \in \mathbf{N}$ tale che $a_n \geq 0$ per ogni $n \geq N$.

In altre parole, a parte un numero finito di termini iniziali che possono avere il segno che vogliono, la successione a_n deve essere "dopo un po' " sempre positiva.
Nella maggior parte dei casi avremo sempre $N = 1$, ovvero la successione sarà globalmente positiva, ma è bene tenere a mente che tutto quanto diremo vale per successioni che siano solo *definitivamente positive*, come si suol dire tecnicamente.

Merito delle serie a termini positivi. *Una serie a termini positivi non può oscillare.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione di questo fatto è semplicissima: infatti basta osservare che la successione delle ridotte $\{s_n\}$ è definitivamente monotona (per ogni $n \geq N$ si ha infatti $s_{n+1} \geq s_n$, dato che $s_{n+1} - s_n = a_n \geq 0$) ed è ben noto che ogni successione monotona ammette sempre limite (finito o infinito). □

LE UNICHE DUE ALTERNATIVE CHE SI HANNO dunque per una serie a termini positivi sono che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sia convergente, oppure che sia divergente a $+\infty$. Inoltre (e grazie a questo fatto) si hanno alcuni criteri molto utili che servono per decidere quale delle due alternative è quella giusta.
Nel caso delle serie a termini positivi useremo anche la scrittura "$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$" per dire che la serie data converge e, analogamente, scriveremo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ per dire che la serie diverge a $+\infty$.

Criterio del confronto. *Date due serie a termini positivi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *si ha che*

$$\text{se} \quad a_n \leq b_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty, \qquad \text{allora} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty;$$

$$\text{se} \quad a_n \geq b_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty, \qquad \text{allora} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

In altre parole se il termine generale a_n di una serie a termini positivi È MAGGIORATO dal termine generale di una serie convergente, allora anche LA SERIE DI PARTENZA CONVERGE. Per converso, se il termine generale a_n di una serie a termini positivi MAGGIORA il termine generale di una serie divergente, allora anche LA SERIE DI PARTENZA È COSTRETTA AD ESPLODERE.

Osservazione. *Segnaliamo subito un fatto: non è necessario che la disuguaglianza* $a_n \leq b_n$ *(o* $a_n \geq b_n$ *) valga per ogni* $n \in \mathbf{N}$ *per poter usare il criterio. E' sufficiente che valga a partire da un certo indice* $N \in \mathbf{N}$ *in avanti, ovvero, come si dice, che valga definitivamente.*

Ad esempio, se sapessimo che la serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge (cosa che sapremo tra breve), allora potremmo concludere che anche la serie (a termini positivi)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$$

converge. Usando infatti il criterio del confronto abbiamo che

$$\frac{1}{n^2+n+1} \leq \frac{1}{n^2},$$

e dato che l'ultima espressione è il termine generale di una serie che, appunto, sappiamo essere convergente, allora anche la serie data converge.

Sempre con lo stesso criterio, una volta noto il fatto che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$, potremo concludere che anche la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n-1}$$

diverge. Vediamo come fare: vorremmo che $3/(n-1)$ maggiorasse $1/n$. Se ciò fosse vero, per la seconda parte del criterio del confronto, anche la serie data dovrebbe divergere. Dunque, rimane da controllare se $3/(n-1) \geq 1/n$. Questo equivale a $3n \geq n-1$, ovvero, $n \geq -1/2$. Dato che per noi n è intero e parte da 2, certamente la disuguaglianza è vera e quindi la serie data risulta divergere.

Questi esempi rendono evidente un fatto: per poter applicare bene il criterio del confronto (ma lo stesso discorso va fatto per i criteri che seguiranno) è bene disporre di un bagaglio di serie dal comportamento noto. Infatti, negli esempi appena discussi abbiamo citato due serie di cui abbiamo dato per noto il comportamento.

Qui di seguito elenchiamo alcune di queste serie. Le dimostrazioni della convergenza o della divergenza di queste serie vengono omesse.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$	*serie armonica*: diverge
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda}$	*serie armonica generalizzata*: converge per $\lambda > 1$; diverge per $\lambda \leq 1$
$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\lvert\log n\rvert^\gamma}$	*serie armonica modificata*: converge per $\gamma > 1$, diverge per $\gamma \leq 1$
$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$	*serie geometrica di ragione* q: converge per $\lvert q\rvert < 1$ con somma $1/(1-q)$; per $q \leq -1$ oscilla e per $q \geq 1$ diverge

Questa tabella va imparata molto bene. Grazie a queste informazioni, possiamo riprendere gli esempi fatti e giustificare quanto detto: nel primo caso avevamo detto che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ risultava convergente: ora sappiamo che si tratta di una serie armonica generalizzata con $\lambda = 2$ ed in effetti tale serie converge. Poi avevamo considerato la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$: questa risulta divergente in quanto è la classica serie armonica ($\lambda = 1$).

Proseguiamo con lo studio dei criteri.

Criterio del confronto (versione asintotica). *Assegnate due serie a termini positivi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *con* $b_n \neq 0$, *per ogni* $n \in \mathbf{N}$, *supponiamo che esista il limite* $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n$ *(finito o meno) e denotiamolo con* L. *Si ha che*

$$
\begin{array}{l}
\textit{se} \quad L \in (0,+\infty), \qquad \textit{allora} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \textit{convergono o divergono entrambe;} \\
\textit{se} \quad L = 0, \quad \textit{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \textit{converge,} \qquad \textit{allora} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{converge} \\
\textit{se} \quad L = \infty, \quad \textit{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \textit{diverge,} \qquad \textit{allora} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{diverge}
\end{array}
$$

Anche in questo caso il criterio ha ragion d'essere se si conosce il comportamento di alcune serie. Vediamo qualche esempio in proposito.

Si voglia stabilire il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} - 8}{3^n}.$$

Osserviamo anche che si tratta di una serie a termini positivi: a parte il primo, che è negativo, tutti gli altri sono positivi. Possiamo allora applicare i vari criteri.

Proviamo a confrontare con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (2/3)^n$, che sappiamo essere convergente, dato che si tratta di una serie geometrica di ragione $q = 2/3$.

Abbiamo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2^{n+1} - 8)/3^n}{(2/3)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2^n - 8}{2^n} = 2$$

Dunque per il confronto asintotico la serie data converge.

Il motivo del nome di questo criterio dà anche un indizio prezioso sul suo utilizzo: la scelta della successione $b_n = (2/3)^n$ non è infatti casuale: come mai abbiamo proprio scelto questa successione e non, ad esempio, $b_n = 3^n$, o $b_n = 2^{n+1}$ (scelte che non avrebbero portato a nulla di buono)?

Guardiamo la successione di partenza nuovamente: si ha infatti

$$a_n = \frac{2^{n+1} - 8}{3^n} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + o\big((2/3)^n\big), \qquad \text{per } n \to \infty,$$

dove il pezzo $o\big((2/3)^n\big)$ è evidentemente $-8/3^n$. Da questo facile conto si vede che il pezzo che "conta" nella successione data è proprio (a meno della costante 2) $(2/3)^n$. Precisando meglio quanto detto, si dice che

$$\frac{2^{n+1}-8}{3^n} \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

sono due successioni asintotiche ed il criterio del confronto asintotico asserisce in buona sostanza che *il comportamento di una serie non cambia se al posto della successione* $\{a_n\}$ *se ne mette un'altra a lei asintotica*.
Certo, la somma della serie cambia –eccome– sostituendo ad una certa successione un'altra a lei asintotica, tuttavia non cambia il comportamento di convergenza o divergenza, ed è questo che a noi interessa maggiormente.
Osserviamo a questo punto che, ad essere rigorosi, non si dovrebbe dire che sono due serie ad essere asintotiche tra loro, ma si dovrebbe riconoscere che sono i loro termini generali ad essere asintotici. Tuttavia questo abuso di linguaggio è tollerato ed anche noi ricorreremo di quando in quando a questa locuzione.

Un'altra osservazione che facciamo è questa: il criterio del confronto è inutile se si sostituisce alla successione data una successione, sì a lei asintotica, ma di cui non si conosce il comportamento della serie associata.
Se, ad esempio, si fosse scelta la successione $b_n = (2^n - n)/(3^n + \log n)$, ancora avremmo constatato che b_n è asintotica ad a_n (lo si verifichi!), ma la successione b_n è ancora più complicata di quella da cui siamo partiti e la serie associata risulta essere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - n}{3^n + \log n},$$

la cui natura è ancora più misteriosa di quella di partenza.

Invece, avendo già scoperto che la serie da cui siamo partiti converge, ora sappiamo che anche tutte quelle con termine generale a_n asintotico a $(2/3)^n$ sono convergenti e quindi, come tale, anche il mostro scritto sopra è una serie convergente.

Ora ci si può sbizzarrire; le seguenti serie sono tutte convergenti (tutti i termini generali sono asintotici a $(2/3)^n$):

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{2^{n+\pi} + n^{50} + \operatorname{sen} n}{\log(\log(\log n)) + 3^{n+1}}, \qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\cos(n^2 - n + 18) + 2^{n-4}}{3^{n-e} + n + \log(n-1)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2 + e^{2^n})}{1 + e^{n \log 3}}.$$

Un altro esempio (più facile) di successioni asintotiche è questo: le successioni 3^n e $3^n + n$ sono asintotiche in quanto il loro rapporto vale

$$\frac{3^n - n}{3^n} = 1 - \frac{n}{3^n} = 1 + o(1), \qquad \text{per } n \to \infty,$$

(e dunque ha limite uguale a 1, al tendere di n all'infinito) pertanto le due serie $\sum_{n=1}^{\infty}(3^n - n)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n$ hanno lo stesso comportamento. Dato che l'ultima diverge, altrettanto fa la prima.

Vediamo un esempio un po' più difficile. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + 1/n^2).$$

La prima cosa da verificare è che la condizione (CN) valga. Questo è semplicissimo:

$$\lim_{n\to\infty} \log(1 + 1/n^2) = \log 1 = 0.$$

Pertanto si deve andare avanti. Il secondo passo consiste nel verificare se si tratta di una serie a termini positivi. Fortunatamente, siamo proprio in questa condizione:

$$\log(1 + 1/n^2) \geq 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad 1 + 1/n^2 \geq 1,$$

ovvero

$$n^2 \geq 0,$$

disuguaglianza banalmente vera.
Dunque possiamo applicare tutti i criteri visti sino ad ora. Proviamo a vedere cosa succede confrontando con la successione $b_n = 1/n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1 + 1/n^2)}{1/n} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x^2)}{x}.$$

Qui abbiamo operato il cambiamento di variabile $1/n = x$ e possiamo interpretare $x \in \mathbf{R}$, in modo da poter usare tutti gli strumenti del calcolo differenziale. Si ha infatti una forma indeterminata del tipo ∞/∞, dalla quale si esce però immediatamente usando de L'Hôpital una sola volta:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{1 + x^2} = 0.$$

Dato che non è venuto un numero finito diverso da zero, significa che abbiamo sbagliato a prendere la successione con cui confrontare: abbiamo preso una successione troppo "lenta". Proviamo allora con $b_n = 1/n^3$. Con calcoli analoghi a quelli or ora fatti si arriva a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1 + 1/n^2)}{1/n^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 + x^2)}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3x(1 + x^2)} = +\infty.$$

Questa volta abbiamo ecceduto nell'altro verso ed abbiamo preso una successione "troppo" infinitesima.

La giusta misura è data dalla successione $b_n = 1/n^2$: vediamo che in effetti è questa la successione cui $\log(1 + 1/n^2)$ è asintotica. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1 + 1/n^2)}{1/n^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x^2)}{x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\log(1 + y)}{y} = 1.$$

Finalmente! Abbiamo scoperto che

$$\log(1+1/n^2) = 1/n^2 + o(1/n^2), \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Dato che $1/n^2$ è il termine generale di una serie convergente (la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$), concludiamo che anche la nostra serie di partenza è convergente.

Con lo stesso ragionamento si deduce che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(2/n)$$

è divergente, infatti si tratta di una serie a termini positivi il cui termine generale ($a_n = \operatorname{sen}(2/n)$) è asintotico alla successione $b_n = 1/n$ (serie armonica con $\lambda = 1$: divergenza).

Volendo essere proprio pedanti si calcola il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(2/n)}{1/n}$$

e ci si accorgerà che viene un numero finito non nullo. Questo ci dice che abbiamo proprio centrato la successione asintotica giusta e da qui, sfruttando il fatto che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge, si conclude.

Con lo stesso ordine di idee si ha che le serie seguenti sono convergenti (si svolgano i conti necessari per alcune delle serie che compaiono, cercando di acquisire il colpo d'occhio necessario).

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\log\bigl(1+1/n^{2.5}\bigr); \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\operatorname{sen} n}{n^2 \log n}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^3 10^{-n}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n^e + \pi^n}{\pi^n e^n}.$$

Le seguenti serie sono invece divergenti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log n \log(1+1/n); \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \cos(1/n); \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\log^2 n + 2}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n^2}{1+7n^3}.$$

Criterio del rapporto (versione asintotica). *Assegnata una serie a termini positivi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *tale che* $a_n \neq 0$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$ *si ha che*

$$\textit{se} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \qquad \textit{allora} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty;$$

$$\textit{se} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \qquad \textit{allora} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

Di solito il criterio del rapporto è quello più usato, spesso a sproposito: il motivo è però comprensibile, dato che non richiede il confronto con nessun altra serie. Tuttavia questo criterio va usato solo in certi casi e non in tutti: si osservi infatti che se e vero che nelle applicazioni raramente capita che $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ non esista, altrettanto vero è che spesso capita che tale limite sia 1 e il valore 1 rappresenta un elemento di confine tra la convergenza e la divergenza, per il quale il il criterio non fornisce alcuna informazione sulla convergenza o sulla divergenza della serie e bisogna usare un altro criterio.

Facciamo qualche esempio.
Ricordiamo che si definisce $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$ e si legge n *fattoriale*. La successione $n!$ cresce molto rapidamente, per rendersene conto si calcoli $3!$, $4!$, $5!$ e $6!$. Per il fattoriale vale evidentemente l'utile formuletta

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1),$$

usata spesso nel seguito.
Studiamo ad esempio la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Qui è molto utile il criterio del rapporto, infatti abbiamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \frac{1/\big(n! \cdot (n+1)\big)}{1/n!} = \frac{1}{n+1}.$$

Il limite dell'ultima espressione è chiaramente zero, pertanto concludiamo che la serie è convergente.
Studiamo ora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}.$$

Il criterio del confronto non dà risultati apprezzabili: se confrontiamo con la serie $b_n = 3^{-n}$, come verrebbe spontaneo fare, otteniamo

$$\frac{n/3^n}{3^{-n}} = n,$$

e l'ultima espressione tende a più infinito.

Proviamo con il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)/3^{n+1}}{n/3^n} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3}.$$

Dato che $1/3 < 1$ la serie converge.

Il criterio del rapporto è molto utile quando ci sono termini generali in cui si hanno esponenti dipendenti da n, oppure quando ci sono fattoriali (o una combinazione delle due cose). Ecco un altro esempio:
studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}.$$

Osserviamo che qui non è nemmeno tanto ovvio vedere se la condizione (CN) è verificata: il limite $\lim_{n\to\infty} 4^n/n!$ non è infatti evidentissimo. Tuttavia il criterio si può applicare anche senza sapere se il termine generale è o meno infinitesimo (in effetti lo è, come vedremo). L'unica cosa che si deve verificare è che la successione sia positiva, ma questo è ovvio. Dunque, usando la versione asintotica del criterio del rapporto si ha.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}/(n+1)!}{4^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\cdot 4^n/\big((n+1)\cdot n!\big)}{4^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n+1} = 0$$

Dato che il limite esiste ed è strettamente minore di 1, la serie data converge (di questa serie si conosce anche la somma che, sia detto per inciso, vale $e^4 - 1$).

Vediamo quest'altro esempio: si discuta il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

Nell'esempio precedente abbiamo visto che $n!$ tende all'infinito molto più rapidamente di 4^n. In tal modo il rapporto $4^n/n!$ è "molto infinitesimo" e la serie risultante riusciva a convergere. Se al posto di 4 vi fosse scritto 6, 57 o 100 non cambierebbe nulla: ancora il fattoriale sarebbe più infinito dell'esponenziale di volta in volta scelto. Proviamo allora a confrontarlo con n^n, che è più infinito di un esponenziale.
Il criterio del confronto è ancora la tattica giusta da seguire:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}/(n+1)!}{n^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+1)^n/\big((n+1)\cdot n!\big)}{n^n/n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} (1+1/n)^n = e\end{aligned}$$

Dato che $e > 1$ otteniamo che la serie diverge.

Ma ora abbiamo capito come procedere: per ottenere una serie convergente basterà fare in modo che si arrivi ad un limite analogo a quello scritto sopra, il quale sia però minore di uno. Ecco un esempio in proposito:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{10^n n!}.$$

Questa serie sicuramente risulterà convergente. Applichiamo il criterio del rapporto e vediamo cosa esce:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}/\big(10^{n+1}(n+1)!\big)}{n^n/(10^n n!)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+1)^n/\big(10(n+1)\cdot 10^n n!\big)}{n^n/(10^n n!)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10}(1+1/n)^n = e/10\end{aligned}.$$

In effetti, come previsto troviamo come limite $e/10$, il quale è minore di 1 e la serie data risulta pertanto convergente.

Criterio della radice (versione asintotica). *Data una serie a termini positivi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *si ha che*

$$\text{se} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1, \qquad \text{allora} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty;$$

$$\text{se} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1, \qquad \text{allora} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

Il criterio della radice è molto simile al quello del rapporto ed a parte qualche esempio non ci insisteremo molto. Si osservi che anche, alla stessa stregua del criterio del rapporto, il valore 1 non produce alcuna informazione: se il limite $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ il criterio non dà alcuna informazione e bisogna procedere diversamente.

Ecco qualche esempio in cui il criterio della radice ha una certa utilità: prima di procedere segnaliamo che non di rado, usando questo criterio, ci si imbatte in limiti della forma

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}, \qquad \text{oppure} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3}, \qquad \text{ecc.}$$

Ebbene, tutti questi limiti valgono 1, come subito si nota scrivendo, ad esempio $\sqrt[n]{n}$ come $e^{(1/n)\log n}$.

Veniamo agli esempi: si discuta il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(\log(e^4 + 1/n))^n}{5^n + 3}.$$

Estraendo la radice n-esima otteniamo:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n(\log(e^4 + 1/n))^n}{5^n + 3}} = \log(e^4 + 1/n) \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{5^n + 3}}.$$

I tre fattori dell'ultima espressione tendono, rispettivamente, a 4, 1 (ecco che compare qui il limite di cui abbiamo parlato poco sopra) e $1/5$; pertanto, passando al limite, troviamo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 4/5,$$

ed essendo tale limite minore di uno otteniamo la convergenza della serie.
Con lo stesso orine di idee si mostra che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\log(e^6 + 5/n))^n}{5^n - 7}$$

diverge (il limite finale vale infatti $6/5$).

I criteri maggiormente usati sono quelli che abbiamo elencato qui sopra. Ne aggiungiamo uno non molto noto, ma qualche volta utile. Questo criterio non ha un nome vero e proprio, quello proposto è solo un modo per ricordarlo.

Criterio di sostituzione. *Sia data una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a termini positivi, tale che la successione* $\{a_n\}$ *sia non crescente. Si ha che*

$$\text{la serie } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{converge} \qquad \text{se e solo se} \qquad \text{la serie } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \quad \text{converge.}$$

Ad esempio, studiamo la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}.$$

Qui $a_n = (\log n)/n^2$. Per applicare il criterio dobbiamo verificare se $\{a_n\}$ è decrescente. Al solito, passiamo "da n a x" e studiamo la funzione

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2} \qquad \text{per } x \geq 2.$$

Derivando troviamo

$$f'(x) = \frac{1 - 2\log x}{x^3}$$

ed in effetti $f'(x) < 0$ per $x \geq 2$. Pertanto la successione $\{a_n\}$ è decrescente. Allora, applicando il criterio troviamo

$$2^n \cdot a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{\log 2^n}{(2^n)^2} = 2^n \cdot \frac{(\log 2) \cdot n}{2^{2n}} = \log 2 \cdot \frac{n}{2^n}$$

L'ultima espressione trovata è il termine generale di una serie convergente (o, se ancora la cosa risulta non chiara è il termine generale di una serie, più facile da studiare di quella data in partenza, la quale dopo uno studio breve risulta essere convergente). Pertanto è convergente anche la serie data all'inizio.

Osserviamo esplicitamente che qui nessun criterio tra quelli enunciati sopra sarebbe servito: il confronto non dà risultati, in quanto si vede subito che $\log n/n^2$ è maggiore di $1/n^2$, ma quest'ultimo è il termine generale di una convergente e dunque non possiamo dire nulla della serie data; analogamente si vede altrettanto facilmente che $\log n/n^2$ è minore di $1/n$, ma di nuovo questa stima non ci dice nulla, dato che $1/n$ è il termine generale di una serie divergente!

Il criterio del rapporto dà come limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)/(n+1)^2}{\log n/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} \cdot \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^2 = 1,$$

che è proprio il valore che invalida l'uso del criterio.
Il criterio della radice (anche se a nessuno verrebbe in mente di usarlo) dà per risultato:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\log n}{n^2}} &= \lim_{n\to\infty} \Big(\frac{\log n}{n^2}\Big)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log\frac{\log n}{n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}(\log\log n - 2\log n)} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\log\log n}{n} - 2\frac{\log n}{n}} = e^{0+0} = 1, \end{aligned}$$

ed anche in questo si trova il valore 1 che rende vano il criterio.

In realtà abbiamo un po' barato nel dire che il criterio del confronto non funziona: sarebbe stato meglio dire che non risulta efficace con le scelte più naturali delle successione $b_n = 1/n^2$ e $b_n = 1/n$. Tuttavia, con la maggiorazione più fine

$$\log n \leq \sqrt{n}$$

valida per ogni n maggiore di un certo N, si trova:

$$\frac{\log n}{n^2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

l'ultima espressione è il termine generale di una serie convergente, pertanto per il criterio del confronto (prima versione) la serie data è convergente.

Mettiamo in evidenza la disuguaglianza usata, dato che potrebbe tornare utile.

Disuguaglianza utile. *Preso un numero strettamente positivo ε, piccolo quanto si vuole, esiste sempre un indice $N \in \mathbf{N}$ tale per cui*

$$\log n \leq n^{\varepsilon}, \qquad \textit{per ogni } n \geq N.$$

Noi abbiamo usato questa disuguaglianza con $\varepsilon = 1/2$. Certamente l'indice N dipende da quanto piccolo abbiamo scelto ε (è tanto più grande, tanto più piccolo scegliamo ε), ma quello che importa è che a partire da tale N, la disuguaglianza vale sempre.

5. Qualche osservazione più profonda (facoltativo)

Una volta imparati i criteri qui sopra esposti, cerchiamo di andare un poco oltre, con qualche osservazione di carattere generale.
Ciò che deve assolutamente essere compreso ora, alla luce di tutte le considerazioni svolte, è che il comportamento di una serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è determinato dall'ordine di infinitesimo del termine generale a_n: se questo è "lento", allora la serie diverge, se questo è "veloce" nel tendere a zero, allora la serie data risulta convergere. Naturalmente bisognerebbe spiegare con precisione che cosa intendiamo con "lento" e "veloce": dopo aver svolto un po' di esercizi, il lettore si sarà fatto l'idea, piuttosto corretta, che a_n è da considerarsi "veloce", quando esso è più infinitesimo di $1/n$, ad esempio $1/n^{1.5}$. In tal caso infatti la serie associata dovrebbe convergere per confronto.
La congettura che uno è dunque portato a fare è che una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se

$$a_n = o(1/n),$$

ovvero se il termine generale è più infinitesimo di $1/n$.
Questa idea non è del tutto corretta (anche se intuitivamente davvero credibile), in quanto esistono successioni che sono $o(1/n)$, ma che non sono $o(1/n^{1+\varepsilon})$, per alcun $\varepsilon > 0$. In altre parole, ci sono successioni a_n tali per cui $n \cdot a_n$ è ancora infinitesima, ma $n^{1+\varepsilon} \cdot a_n$ non lo è più, comunque piccolo si scelga $\varepsilon > 0$. Una tale successione si trova in bilico tra il baratro della divergenza e la spiaggia sicura della convergenza (della serie associata, ovviamente).
Forse un esempio vale più di mille parole: consideriamo le due successioni

$$a_n = \frac{1}{n \log n}, \qquad \text{e} \qquad a'_n = \frac{1}{n(\log n)^2}, \qquad \text{per } n \geq 2.$$

Ora, entrambe le successioni sono più infinitesime di $1/n$ (ovvero, esse sono $o(1/n)$, infatti, divise per $1/n$ sono ancora infinitesime). Tuttavia esse lo sono talmente poco di più da non risultare $o(1/n^{1+\varepsilon})$, qualunque sia $\varepsilon > 0$. Per rendersene conto scegliamo, a titolo di esempio $\varepsilon = 0.00001$: abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(n \log n)}{1/n^{1.00001}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{0.00001}}{\log n} = \infty$$

e del tutto analogamente si procede con l'altra successione. Dunque, come si vede, si tratta di due successione che hanno ordine di infinitesimo più grande di 1, ma più piccolo di $1 + \varepsilon$, per ogni $\varepsilon > 0$! Questo, tra l'altro, è uno dei motivi per cui non è possibile disporre di una scala ben ordinata di infinitesimi.

Potremmo dire che queste successioni hanno ordine $1+$, inventando il numero $1+$ che ha la proprietà di essere più grande di uno, ma minore di ogni numero più grande di 1. Tuttavia ci si rende ben conto come peggiorare le cose: la successione

$$a''_n = \frac{1}{n \log n \cdot \log \log n}$$

è ancora più infinitesima di a_n , ma meno di $a'_n \dots$ insomma il punto è che ci sono ordini di infinitesimi "interstiziali" che non rientrano in scale ben ordinate e di cui bisogna tener conto. Infatti, la serie associata ad a_n diverge, mentre quella associata ad a'_n converge! Eppure entrambe sono davvero pochissimo distanti da $1/n$.

Ritornando alla congettura, allora, dobbiamo ammettere che essa è falsa. Tuttavia il principio che ci ha spinto a formularla rimane ben saldo: se riusciamo a riconoscere l'ordine di infinitesimo di una successione, allora la serie associata ha lo stesso comportamento della serie associata ad una qualunque successione asintotica a quella data. Detto ancora diversamente: data una serie si cerca il prototipo (cioè l'espressione più semplice in assoluto) di termine generale asintotico a quello dato. Per tale prototipo si suppone noto il comportamento della serie associata, ebbene, allora la serie data avrà lo stesso comportamento di questa. Ciò è sistematicamente quello che si fa quando si usa il criterio del confronto (il capostipite di tutti i criteri).

Questa è davvero l'essenza delle serie a termini positivi: bisogna capire come tende a zero il termine generale, cercando di non farsi fuorviare da termini aggiunti solo per complicare le cose.

Ad esempio, la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3^n + \operatorname{sen}(4^n + 20)}{4^n + \log(n^{60} + 1)}$$

è convergente. Non è magia: si tratta semplicemente di capire che il termine generale è asintotico al molto più semplice termine $b_n = (3/4)^n$ (quello che sopra abbiamo chiamato "prototipo"), il quale ha serie associata convergente. Per capire questo basta eliminare i termini inutili: n^2 , ad esempio, è trascurabile rispetto a 3^n e dunque non pesa affatto sulla convergenza o sulla divergenza della serie, e quindi si butta. Per non parlare di $\operatorname{sen}(4^n + 20)$, scritto solo per spaventare lo sprovveduto: si tratta semplicemente di un termine limitato che non ha peso rispetto a 3^n . Al denominatore si fa la stessa cosa, eliminando gli infiniti di ordine minore. Rimane allora solo 4^n . Ecco perché, alla fine, si rimane con la frazione $3^n/4^n$, certamente asintotica alla successione data in partenza.

Purtroppo se è vero che questo è il principio cardine che governa le serie a termini positivi, altrettanto vero è che non esistono regole chiare che insegnino ad operare.
Se si presenta a_n come frazione, in effetti, l'idea di eliminare gli infiniti di ordine minore funziona, però è anche vero che non bisogna cadere in trabocchetti: nella serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3 - n^3 - 3n^2}{n^3 + 1}$$

non si può cancellare impunemente il termine $-3n^2$ al numeratore! Infatti non è affatto detto che, a conti fatti, sia davvero lui l'infinito di ordine più basso. In effetti, svolgendo il cubo, si giunge all'espressione

$$(n+1)^3 - n^3 - 3n^2 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 - 3n^2 = 3n + 1$$

pertanto, come ben si vede, l'infinito più basso è 1! La serie allora risulta convergente, in quanto asintotica a $1/n^2$ e non risulta divergente, come si sarebbe ottenuto sopprimendo ingenuamente il termine $-3n^2$. Dunque la presenza di segni "meno" deve mettere in guardia.

Altrettanto vero è che non sempre la frazione si presenta come rapporto di infiniti: la serie (discussa negli *Esercizi Svolti*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n) + 1/n^3}{1 - \cos(1/n)}$$

si presenta ad esempio come rapporto di infinitesimi e bisogna agire diversamente, cercando di scartare i termini maggiormente infinitesimi!

Infine, potrebbe capitare il caso in cui il termine generale di una serie non si presenti proprio come rapporto: si consideri ad esempio la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Un esempio analogo a questa serie è discusso negli *Esercizi Svolti*.

Insomma, come si diceva, non vi sono regole certe. La direttiva resta in ogni caso

Individuare il prototipo di infinitesimo di a_n

e sul *come* ciò debba essere fatto, non possiamo però che presentare vari esercizi risolti, cercando di far scaturire sesto senso ed esperienza al lettore.

6. Serie a termini di segno qualunque

I criteri visti sino a qui valgono SOLO per le serie di segno (definitivamente) costante, ovvero serie a termini positivi o serie a termini negativi. Sulle serie a termini negativi non abbiamo detto niente, ma è chiaro che tutto quanto detto per le serie a termini positivi ha una perfetta controparte per le serie a termini negativi. Ad esempio, una serie a termini negativi non può che convergere o divergere a $-\infty$ ed una volta che uno ha una serie a termini negativi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, si studia dapprima la serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{\infty} -a_n$, e poi rovesciano i risultati ottenuti. Su questo punto non c'è null'altro da dire.

Molto più complicato è invece il caso di una serie a termini di segno qualunque, cioè una serie i cui termini continuano a cambiare di segno.
Un esempio famoso è dato dalla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Questa serie non è né a termini positivi, né a termini negativi, poiché $(-1)^n/n$ cambia segno infinite volte: è positivo quando n è pari ed è negativo quando n è dispari. Per serie di questo genere i criteri enunciati sopra NON valgono.

Quando si ha a che fare con serie di segno oscillante ci sono sostanzialmente due criteri fondamentali.

Serie assolutamente convergenti. *Sia data una serie di segno qualunque* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Se la serie $\displaystyle\sum_{n=1} |a_n|$ *converge,* *allora* *la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

Dunque, data una serie qualunque $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, uno verifica se la serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge (e a questa serie si possono applicare tutti i criteri visti sopra, essendo una particolare serie a termini positivi). Se la risposta è affermativa, allora anche la serie di partenza risulta convergente. Le serie che godono di questa proprietà si dicono *serie assolutamente convergenti.*

Motivati da questo criterio, vediamo cosa accade alla serie presa ad esempio poco sopra:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

L'ultima serie scritta diverge, per cui la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$ non è assolutamente convergente. Il che, si badi bene, non esclude affatto che la serie sia convergente. In effetti la serie data è proprio convergente. Il motivo della convergenza non è dovuto al forte annullamento all'infinito del termine generale (che tra l'altro si comporta come $1/n$ ed è pertanto abbastanza lento nel tendere a zero), ma piuttosto al fatto che il segno alterno consente ai vari termini della serie di "mangiarsi", compensandosi in modo che la successione delle ridotte risulti convergente.

Un esempio di serie assolutamente convergente è invece dato dalla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

dato che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

e l'ultima serie converge. Sicché la serie data risulta pure convergente. Il secondo criterio che diamo serve proprio per le serie come quella data all'inizio di questa sezione.

Criterio di Leibniz. *Sia data la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *, dove* $\{a_n\}$ *è una successione positiva, decrescente ed infinitesima.*
In queste ipotesi

$$\textit{la serie} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \qquad \textit{conerge.}$$

Nel nostro caso $a_n = 1/n$, pertanto tutte le ipotesi sono verificate e la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

risulta convergente per il criterio di Leibniz.

Le serie che convergono, pur non convergendo assolutamente, si chiamano *serie semplicemente convergenti* e la serie appena discussa ne è un esempio.

Le serie a termini positivi sono sempre o assolutamente convergenti o divergenti, mentre le serie di segno qualunque possono essere assolutamente convergenti, semplicemente convergenti, divergenti od oscillanti.

1) Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{5n-8}$$

Osservo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{5n-8} = \frac{2}{5}.$$

Il termine generale non è infinitesimo e quindi la serie non converge.

2) Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \text{sen}\, \frac{1}{n^3}.$$

Il termine generale è infinitesimo:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \text{sen}\, \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\text{sen}\, \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot 1 = 0,$$

dunque bisogna andare avanti. Osservo che si tratta di una serie a termini positivi. Dato che $\text{sen}\, 1/n^3$ è asintotico a $1/n^3$, congetturo che il termine generale, nel suo complesso, sia asintotico a $n^2 \cdot 1/n^3 = 1/n$. Verifico questa idea confrontando con la successione $b_n = 1/n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \,\text{sen}\, \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}\, \frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}} = 1.$$

Per il criterio del confronto (forma asintotica) concludiamo che la serie diverge, in quanto ha lo stesso comportamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ (serie armonica semplice).

3) Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(1/n) + 1/n^3}{1 - \cos(1/n)}$$

Anzitutto osserviamo che si tratta di una serie a termini positivi. Osservo ora il numeratore del termine generale: abbiamo

$$\text{sen}(1/n) + 1/n^3 = 1/n + o(1/n) + 1/n^3 = 1/n + o(1/n), \qquad \text{per } n \to \infty,$$

dove abbiamo inglobato il termine $1/n^3$ in $o(1/n)$, come è lecito fare. Sviluppando il denominatore si ha

$$1 - \cos(1/n) = 1 - 1 + 1/(2n^2) + o(1/n^2) = 1/(2n^2) + o(1/n^2), \qquad \text{per } n \to \infty.$$

In definitiva

$$a_n = \frac{1/n + o(1/n)}{1/(2n^2) + o(1/n^2)} = \frac{1 + o(1)}{1/(2n) + o(1/n)}, \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Sicché il

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

e la serie data non risulta quindi convergente (non è verificata la condizione (CN)).

---

4) Studiare la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\big).$$

Grazie alla monotonia della funzione $\sqrt{\cdot}$, si ha che la serie data è a termini positivi, poiché $\sqrt{n+1} > \sqrt{n-1}$.
Non è nemmeno evidente che il termine generale di questa serie sia infinitesimo: cerchiamo di sincerarcene, sperando che i conti che faremo gettino una luce di comprensione sull'intera faccenda. Pertanto, dobbiamo studiare il limite

$$\lim_{n\to\infty} \big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\big).$$

Osserviamo che si ha una forma indeterminata del tipo $\infty - \infty$, da cui è possibile uscire in almeno due modi: usando gli sviluppi asintotici, oppure con un trucco algebrico. Vediamo entrambi i metodi: con gli sviluppi otteniamo, per $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} &= \sqrt{n}\big(\sqrt{1+1/n} - \sqrt{1-1/n}\big) = \sqrt{n}\big((1+1/n)^{\frac{1}{2}} - (1-1/n)^{\frac{1}{2}}\big) \\
&= \sqrt{n}\big(1 + 1/(2n) + o(1/n) - 1 + 1/(2n) + o(1/n)\big) \\
&= 1/\sqrt{n} + o(1/\sqrt{n}).
\end{aligned}$$

In questa serie di passaggi abbiamo sfruttato lo sviluppo $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$, per $x \to 0$, ove, come al solito, per noi $x = 1/n$ e qui $\alpha = 1/2$.
D'altro canto, procedendo algebricamente, troviamo:

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \\
&= \frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}.
\end{aligned}$$

In entrambi i casi è ora del tutto evidente che non solo il termine generale della serie data è infinitesimo, ma, di più, apprendiamo che esso è asintotico a $b_n = 1/\sqrt{n}$. Pertanto, confrontando proprio con questa successione, troviamo che la serie data risulta divergente, perché tale è la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ (serie armonica generalizzata, con $\lambda = 1/2$).

---

5) Studiare la serie

$$\sum_{n=3}^{\infty} \bigl(\log(n+1) - \log(n-1)\bigr)$$

Sfruttando il fatto che $\log(n+1) > \log(n-1)$, concludiamo che la serie data è a termini positivi. Conviene scrivere $\log(n+1) - \log(n-1)$ come $\log\bigl((n+1)/(n-1)\bigr)$, ovvero

$$\log \frac{n+1}{n-1} = \log \frac{n-1+2}{n-1} = \log\Bigl(1 + \frac{2}{n-1}\Bigr).$$

In tal modo risulta subito evidente che l termine generale della serie assegnata è infinitesimo (ci si era posto il problema?) e, d'altro canto, si ha anche

$$\log\Bigl(1 + \frac{2}{n-1}\Bigr) = \frac{2}{n-1} + o(1/(n-1)), \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Ora è chiaro he la serie data diverge: essa risulta infatti asintotica alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, la quale diverge (serie armonica).
Si poteva anche procedere così:

$$\begin{aligned}
\log(n+1) - \log(n-1) &= \log\bigl(n(1+1/n)\bigr) - \log\bigl(n(1-1/n)\bigr) \\
&= \log n + \log(1+1/n) - \log n - \log(1-1/n) \\
&= 2/n + o(1/n), \qquad \text{per } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Naturalmente otteniamo un risultato analogo a quello ottenuto in precedenza, infatti leggiamo da quest'ultima identità il fatto che il termine generale della serie data è asintotico a $1/n$, e dunque la serie data diverge.

---

6) Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n 10^{-\sqrt{n}}.$$

Sospetto che la parte infinitesima di tipo esponenziale $10^{-\sqrt{n}}$ prevalga su n. Confronto, ad esempio, con la successione $1/n^2$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n10^{-\sqrt{n}}}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{10^{\sqrt{n}}} = 0,$$

come subito si accerta. Essendo il limite nullo ed essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ convergente, per il criterio del confronto, concludiamo che la serie data converge.

---

7) Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\Big).$$

Osservo subito che si tratta di una serie a termini positivi, il cui termine generale è della forma

$$a_n=\frac{1}{n}+o(1/n),$$

pertanto la serie è divergente, in quanto il suo termine generale è asintotico a $1/n$ (e la serie associata a $1/n$ diverge –serie armonica–)

Procedendo in altra maniera, conviene dapprima scrivere il termine generale in un'unica frazione:

$$a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}=\frac{n-1}{n^2}$$

Ora osserviamo che $n-1\geq n/2$, per $n\geq 2$. Quindi per confronto ho che

$$a_n\geq\frac{n/2}{n^2}=\frac{1}{2n}.$$

Dato che l'ultimo espressione è il termine generale di una serie divergente, anche la serie da cui sono partito diverge.

---

8) Studiare la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log(\log n)}{\log n}.$$

Osservo che si tratta di una serie a termini positivi (da $n=3$ in avanti). Certamente si ha $\log(\log n)\geq 1$, per $n\geq 10$ e si ha anche $\log n\leq n$, per ogni $n\in\mathbf{N}$. Quindi

$$\frac{\log(\log n)}{\log n}\geq\frac{1}{n},\qquad \text{per } n\geq 10\,.$$

Da qui si conclude subito che la serie diverge, per il criterio del confronto (versione non asintotica).

---

9) Studiare la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n^3-5\,\mathrm{sen}\,n}{4n^5+\log n}.$$

La successione è a termini positivi (almeno definitivamente) e risulta asintotica a $1/n^2$, pertanto converge.
Allo stesso risultato (e per le stesse motivazioni) si perviene con il criterio del confronto asintotico, usando come successione $b_n = 1/n^2$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n^3 - 5 \operatorname{sen} n)/(4n^5 + \log n)}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^5 - 5n^2 \operatorname{sen} n}{4n^5 + \log n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2 - (5 \operatorname{sen} n/n^3)}{4 + (\log n)/n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + o(1)}{4 + o(1)} = \frac{1}{2}\end{aligned}.$$

Poiché il limite è finito e la successione b_n converge, otteniamo che la serie di partenza converge.

---

10) Studiare la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}.$$

Si tratta di una serie alternante. Questa serie non converge assolutamente, in quanto la serie dei valori assoluti è

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$$

e diverge per confronto con $1/n$.
Provo a vedere se è applicabile il criterio di Leibniz: per questo devo verificare che la successione $1/\log n$ sia positiva, decrescente ed infinitesima. Ma questo è senz'altro vero, dato che $\log n$ è crescente e tende a $+\infty$.
Concludiamo allora che la serie data è semplicemente convergente.

---

11) Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n} - 1}{5n^{1/2}}.$$

Si tratta di una serie a termini positivi, dato che $e^{1/n} \geq 1$, per $n \geq 1$. Il numeratore della frazione data è asintotico a $1/n$, dato che

$$e^{1/n} - 1 = \frac{1}{n} + o(1/n).$$

In definitiva l'intero termine generale a_n risulta asintotico a

$$a_n = \frac{1/n}{n^{1/2}} + o(1/n^{3/2}) = \frac{1}{n^{3/2}} + o(1/n^{3/2}).$$

Dato che la serie $\sum_{n=1} 1/n^{3/2}$ è convergente (armonica generalizzata $\lambda = 3/2 > 1$), la serie data risulta convergente.

---

12) Per quali valori di $a \in \mathbf{R}$ la serie seguente converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{na^{n+1}}{3^n}$$

Cominciamo con il supporre $a \geq 0$: in tal caso la serie è a termini positivi e si presta bene ad essere studiata mediante il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)a^{n+2}/3^{n+1}}{na^{n+1}/3^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot a$$

Il limite di questa espressione, al tendere di n all'infinito, è chiaramente $(1/3)a$. Ora, si ha che $(1/3)a < 1$ per $a < 3$, pertanto

$$\begin{aligned} &\text{se} \quad a \in [0,3) \quad \text{allora} \quad \text{la serie} \quad \text{CONVERGE} \\ &\text{se} \quad a > 3 \quad \text{allora} \quad \text{la serie} \quad \text{DIVERGE.} \end{aligned}$$

Rimane da valutare il caso limite in cui sia $a = 3$ e chiaramente il criterio del rapporto non funziona più.
Nel caso in cui $a = 3$ si ottiene tuttavia la semplice serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{n+1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 3n,$$

che risulta ovviamente divergente. Dunque,

$$\text{se} \quad a = 3 \quad \text{allora} \quad \text{la serie} \quad \text{DIVERGE.}$$

Occupiamoci ora del caso $a < 0$. La serie da studiare diventa allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}|a|^{n+1}}{3^n}.$$

Si tratta di una serie alternante. Se $a \leq -3$ il termine generale della serie non è nemmeno infinitesimo, per cui scopriamo subito che

$$\text{se} \quad a \leq -3 \quad \text{allora} \quad \text{la serie} \quad \text{NON CONVERGE.}$$

Anzi, si potrebbe vedere che la serie risulta oscillante.
Nel rimanente caso, cioè per $a \in (-3, 0)$ la serie converge assolutamente, dato che

$$|a_n| = \frac{n|a|^{n+1}}{3^n}$$

e ci riconduciamo al caso appena trattato (infatti se $a \in (-3,0)$, allora $|a| \in (0,3)$. Quindi, in definitiva,

se $-3 < a < 3$ allora la serie CONVERGE ASSOLUTAMENTE;

se $a = 3$ allora la serie DIVERGE A $+\infty$;

se $a = -3$ allora la serie OSCILLA;

se $a > 3$ allora la serie DIVERGE A $+\infty$;

se $a < -3$ allora la serie OSCILLA;

---

13) Per quali valori di $a > 0$ la serie seguente converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-\cos(1/n^a)}}{n+1}$$

Osservo che si tratta di una serie a termini positivi, pertanto sono applicabili i criteri visti sopra.
Ricordiamo che si ha lo sviluppo $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$, per $x \to 0$. Pertanto, poiché $1/n^a \to 0$, al tendere di n all'infinito, abbiamo che

$$\cos(1/n^a) = 1 - \frac{1}{2n^{2a}} + o(1/n^{2a}), \qquad \text{per } n \to \infty.$$

Dunque, per quanto riguarda il numeratore del termine generale dato, si ha che

$$\sqrt{1-\cos(1/n^a)} = \left(\frac{1}{2n^{2a}} + o(1/n^{2a})\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}n^a} + o(1/n^a)$$

Complessivamente avremo allora, sempre per $n \to \infty$,

$$\frac{\sqrt{1-\cos(1/n^a)}}{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2n^{2a}} + o(1/n^{2a})\right)^{\frac{1}{2}}}{n+1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}n^a} + o(1/n^a)}{n(1+o(1))} = \frac{1}{\sqrt{2}n^{a+1}} + o(1/n^{a+1}).$$

Questo mostra che il termine generale a_n della serie data è asintotico alla più semplice espressione $b_n = 1/n^{a+1}$ (che è il termine generale della serie armonica generalizzata, con $\lambda = a+1$).
Sicché, per $a > 0$, dunque per ogni a considerato, la serie data risulta convergente.

---

14) Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n + 1}{n!}$$

Osservo che si tratta di una serie alternante. Controllo se la serie converge assolutamente. Esamino pertanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{n!}$$

Applico il criterio del rapporto, come la presenza dei termini esponenziali e fattoriali mi inducono a fare. Otteniamo:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}+1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n+1} = \frac{2\cdot 2^n+1}{n!\cdot(n+1)} \cdot \frac{n!}{2^n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2+o(1)}{1+o(1)} = \frac{2}{n+1} + o(1).$$

Dunque,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

e di qui si ha che la serie con i valori assoluti converge.
Concludiamo allora che la serie data in partenza risulta assolutamente convergente.

---

15) Studiare la convergenza della serie seguente, al variare del parametro $\beta \in \mathbf{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(\beta/n + \operatorname{sen}(1/n)\big)$$

Se $\beta > 0$ la serie è a termini positivi e per confronto otteniamo subito che questa diverge, infatti si ha evidentemente

$$\beta/n + \operatorname{sen}(1/n) \geq \beta/n$$

e l'ultima espressione è il termine generale di una serie divergente.
Nel caso in cui $\beta = 0$ la serie risulta ancora divergente: possiamo, ad esempio, usare il confronto asintotico con la successione $1/n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n} \overset{(1/n=x)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

e pertanto la serie data ha lo stesso comportamento di $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, la quale, come ben si sa, è divergente.
Rimane il caso $\beta < 0$, che è più complicato.
Innanzitutto ricordiamo che $\operatorname{sen} x \leq \alpha x$, per ogni $\alpha \geq 1$ (e x sufficientemente piccolo), mentre $\operatorname{sen} x \geq \alpha x$, per ogni $\alpha < 1$ (e, di nuovo, x sufficientemente piccolo). Grazie a queste due disuguaglianze, sappiamo che, anche nel caso in cui sia $\beta < 0$, il termine generale della serie data ha sempre (definitivamente) segno costante: precisamente la serie data è a termini positivi per $-1 < \beta < 0$ ed è a termini negativi se $\beta \leq -1$.
Dunque, in tutti i casi possiamo applicare i criteri che conosciamo.
Se $-1 < \beta < 0$ la serie diverge: per mostrare questo basta confrontare con $b_n = 1/n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta/n + \operatorname{sen}(1/n)}{1/n} = \beta + \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n} = \beta + 1.$$

L'ultimo numero non è nullo e pertanto la serie ha lo stesso comportamento di $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, la quale diverge.
Se $\beta < -1$ la serie di nuovo risulta divergente: essendo in questo caso una serie a termini negativi, confrontiamo con $b_n = -1/n$: troviamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta/n + \operatorname{sen}(1/n)}{-1/n} = -\beta - \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n} = -\beta - 1 > 0.$$

Quindi anche in questo caso abbiamo divergenza (a $-\infty$).
In ultimo, mostriamo che per $\beta = -1$ la serie risulta convergente. Confrontiamo con la successione $-1/n^3$ (ancora la serie è a termini negativi ed uso per il confronto una serie a termini negativi):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n) - 1/n}{-1/n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n - 1/(6n^3) + o(1/n^3) - 1/n}{-1/n^3} = 1/6.$$

Il limite trovato è finito e non nullo, pertanto la serie converge (in quanto asintotica a $\sum_{n=1}^{\infty} -1/n^3$.
In definitiva la serie data diverge a $+\infty$ per $\beta > -1$, converge assolutamente per $\beta = -1$ e diverge a $-\infty$ per $\beta < -1$.

---

16) Studiare il comportamento della serie seguente:

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log\log n)^3}$$

Usiamo il criterio di sostituzione, osservato che esso è applicabile, in quanto il termine generale della serie è effettivamente positivo e non crescente. Supponiamo, solo per semplicita, che i logaritmi che compaiono siano in base 2, in modo da non trascinare nei conti inutili costanti. Si ha:

$$2^n a_{2^n} = \frac{2^n}{2^n \log 2^n (\log\log 2^n)^3} = \frac{2^n}{2^n n (\log n)^3} = \frac{1}{n(\log n)^3}$$

Dato che quest'ultima espressione è il termine generale di una serie convergente (si tratta di una serie dal comportamento noto, si veda la tabella proposta negli "Appunti"), la serie data risulta pure convergente.
Si osservi che la spontanea maggiorazione

$$\frac{1}{n \log n (\log\log n)^3} \le \frac{1}{n \log n}$$

non sarebbe servita, poiché la serie associata all'ultima espressione è divergente.

---

17) Studiare il comportamento della serie seguente:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n2^n}$$

Si tratta di una serie a termini positivi.
Metodo rapido: ovviamente $n-1 \leq n$, quindi

$$\frac{n-1}{n2^n} \leq \frac{n}{n2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

Il criterio del confronto ci dice allora che la serie data converge, dato che il suo termine generale è maggiorato dal termine generale di una serie convergente (serie geometrica di ragione $1/2$).

Oppure: la presenza di un termine di tipo esponenziale ci induce ad usare il criterio dela rapporto. Vediamo se funziona:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)-1}{(n+1)2^{(n+1)}}}{\dfrac{n-1}{n2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{n}{(n+1)2^n} \cdot \frac{n2^n}{n-1} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n-1)} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2-1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Dato che $1/2 < 1$ deduciamo che la serie data risulta convergente. Si presti attenzione a non perdere per strada il fattore $1/2$ che proviene da $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$: è questo numeretto che fa tutta la differenza, se lo si dimentica si ottiene il limite 1 ed il criterio sembrerebbe inutilizzabile!!