Corso di Equazioni Differenziali e Sistemi Dinamici

Soluzioni prova scritta del 27 gennaio 2004

Esercizio 1. L'equazione è a variabili separabili. Poniamo dunque $I := \mathbb{R}$, $J := (0, +\infty)$, $a : I \to \mathbb{R}$, $b : J \to \mathbb{R}$, $a(t) := e^t$, $b(y) := y^{-1}e^{-y}$. Si osservi che, per y grande, la funzione $y \mapsto f(t, y)$ si comporta come un'esponenziale decrescente ed è dunque limitata. Inoltre, si vede facilmente che ogni soluzione y'_λ è strettamente crescente. Dunque, grazie al Teorema di esistenza in grande, si ottiene che $[\lambda, +\infty) \subset \mathrm{dom}(y_\lambda)$ per ogni λ.

Tuttavia, questo tipo di ragionamento non permette di concludere nulla sul problema all'indietro. Integrando l'equazione si trova allora che per ogni soluzione e ogni tempo t deve valere la relazione

$$A(t) = e^t - e^\lambda = (y_\lambda - 1)e^{y_\lambda} = B(y_\lambda).$$

Pertanto, il dominio di y_λ risulta essere l'insieme I_0 dei tempi t tali che $A(t) \in B(J)$, ossia

$$e^t - e^\lambda \in (-1, +\infty), \qquad \text{o anche} \quad e^t \in (e^\lambda - 1, +\infty),$$

da cui, se $\lambda \le 0$, $A(\mathbb{R}) = (0, +\infty) \subset (e^\lambda - 1, +\infty)$ e dunque $\mathrm{dom}\, y_\lambda = \mathbb{R}$. Altrimenti, se $\lambda > 0$, deve essere verificata la condizione $e^t > e^\lambda - 1$, ossia

$$\mathrm{dom}(y_\lambda) = \big(\log(e^\lambda - 1), +\infty\big).$$

Esercizio 2. (a) Si osservi innanzitutto che per il Teorema di esistenza in grande ogni soluzione ha dominio $(0, +\infty)$. Inoltre, per $\lambda = 0$, $y_0 \equiv 0$ è soluzione stazionaria. Inoltre, si verifica facilmente che $y_{-\lambda} = -y_\lambda$; dunque, basta limitarsi al caso $\lambda \in (0, 2\pi]$.

Studiando la derivata prima, si ricava che y_λ è crescente per $y_\lambda/t \in (0, \pi)$ e decrescente per $y_\lambda/t \in (\pi, 2\pi)$. La retta $y = \pi t$ è luogo di minimi, mentre la retta $y = 2\pi t$ è luogo di massimi. Nell'intervallo considerato $[1, +\infty)$, le soluzioni corrispondenti a $\lambda \in [\pi, 2\pi]$ attraversano la retta $y = \pi t$; invece, se $\lambda \in [0, \pi)$ non la attraversano mai. Studiando il segno della derivata seconda, si vede che le soluzioni sono convesse per $\pi/2 < y/t < 3\pi/2$ e concave per $0 < y/t < \pi/2$ e $3\pi/2 < y/t < 2\pi$. Le rette $y = \pi t/2$ e $y = 3\pi t/2$ sono luoghi di flessi. È interessante notare che se $\lambda \ge \pi/2$ ogni soluzione attraversa una sola volta (nell'intervallo $[1, +\infty)$) la retta $y = \pi t/2$ (la possibilità che tale retta non venga mai attraversata si esclude ragionando come sotto); dunque, per t grande è definitivamente crescente e concava. In particolare, esistono i limiti

$$\lim_{t\to+\infty} y_\lambda(t) =: \ell \in (0, +\infty) \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to+\infty} y'_\lambda(t) =: L \in [0, \pi/2).$$

Si può facilmente escludere che sia $L > 0$; infatti, in tal caso, leggeremmo che, quando $t \to +\infty$, $y'_\lambda(t) = L + o(1)$; dunque, integrando, $y_\lambda(t) = Lt + o(t)$, da cui, usando l'equazione, $L = \sin L$, che implica $L = 0$.

Si può anche escludere, ed è più difficile, che $\ell < +\infty$. In tal caso, avremmo che

$$\ell - \lambda = \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{y_\lambda(t)}{t}\right) dt;$$

dunque, l'integrale improprio a secondo membro convergerebbe. Tuttavia, ciò è impossibile, in quanto, per t grande, è per ipotesi $y_\lambda(t) \sim \ell$; dunque

$$\sin\left(\frac{y_\lambda(t)}{t}\right) \sim \sin\left(\frac{\ell}{t}\right) \sim \frac{\ell}{t},$$

che dà luogo a un integrale improprio divergente.

(b) Dall'equazione si vede che la funzione y'_λ è limitata su $(0, +\infty)$. Dunque, la sua primitiva y_λ è Lipschitziana e pertanto è prolungabile in modo Lipschitz all'intervallo $[0, +\infty)$.

Esercizio 3. Detta $A = A(n)$ la matrice dei coefficienti, il sistema si risolve esplicitamente. Si ha infatti $A = MDM^{-1}$, ove le matrici M, D (dipendenti da n) sono date da

$$M = \begin{pmatrix} n & 1 \\ n+1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque,

$$Y(t) = Me^{Dt} = \begin{pmatrix} ne^{nt} & e^t \\ (n+1)e^{nt} & 2e^t \end{pmatrix}$$

è una matrice fondamentale per il sistema. Pertanto l'integrale generale è della forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} ne^{nt} \\ (n+1)e^{nt} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^t \end{pmatrix}, \qquad \text{ove} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Sostituendo la condizione di Cauchy otteniamo $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$ (per ogni n). Dunque, $x_n(1) + y_n(1) = 3e$ per ogni n.

Esercizio 4. Lo studio del sistema linearizzato non fornisce alcun aiuto. Peraltro, il sistema è completamente disaccoppiato. Detta dunque $(x, y)(0) = (x_0, y_0)$ la (generica) condizione iniziale, integrando separatamente le due equazioni si ha, almeno per $x_0, y_0 \neq 0$,

$$\frac{1}{x(t)} = \frac{1}{x_0} + t, \qquad \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{y_0} + t,$$

da cui, eliminando il tempo,

$$y = \frac{x}{1 + cx} = \frac{1}{c}\Big(1 - \frac{1}{1 + cx}\Big), \qquad \text{ove} \quad c = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{x_0}$$

Questo permette di disegnare tutte le traiettorie; infatti i casi in cui x_0 o y_0 è 0 sono banali. Si vede anche facilmente che l'unico punto critico $(0, 0)$ è instabile. Ad esempio, $\forall\, \lambda > 0$ la traiettoria corrispondente a $(x_0, y_0) = (-\lambda, 0)$ esplode in tempi finiti. Si noti che, invece, la traiettoria corrispondente a $(x_0, y_0) = (\lambda, 0)$ decade (ma non esponenzialmente) a $(0, 0)$