Corso di Equazioni Differenziali e Sistemi Dinamici

Soluzioni prova scritta del 21 gennaio 2003

Esercizio 1. Poniamo $f(y) := g(y^2)$. Si ha allora che $f \in C^1(\mathbb{R})$; dunque valgono in ogni caso le ipotesi del Teorema di esistenza e unicità in piccolo.

(a) Scegliendo ad esempio $g(r) = 1 + r$, si può calcolare esplicitamente la soluzione y_λ, che si vede avere dominio limitato per ogni valore di $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) La condizione (2) implica che $f(1) = f(-1) = 0$. Dunque $\overline{y} = \pm 1$ sono soluzioni stazionarie. Questo implica che per ogni $\lambda \in [-1, 1]$ la corrispondente soluzione y_λ ha grafico "compreso" tra i grafici delle due soluzioni stazionarie; pertanto deve essere definita su tutto $\mathbb{R}$. Se invece λ è un qualsiasi valore al di fuori di $[-1, 1]$, la scelta di $g(r) = r - 1$ fornisce una soluzione non definita su tutto $\mathbb{R}$, come si vede con un calcolo esplicito (o con considerazioni di segno).

(c) La regolarità C^1 di f implica che esiste $M > 0$ tale che $|f(y)| \leq M$ per ogni $y \in [-1, 1]$. D'altro canto, la condizione (3) implica che

$$y^2 |f(y)| = y^2 |g(y^2)| \leq |1 - y^2| \qquad \forall\, y \in \mathbb{R};$$

dunque,

$$|f(y)| \leq 1 - \frac{1}{y^2} \leq 1 \qquad \forall\, y \notin [-1, 1];$$

ne segue che f è limitata in $\mathbb{R}$ e il problema ha esistenza in grande per ogni λ.

Esercizio 2. Si noti innanzitutto che, posto $\lambda_0 := \tan 1$, $y_{\lambda_0} \equiv \lambda_0$ è soluzione stazionaria del problema di Cauchy. Dunque, $m_{\lambda_0} = \lambda_0^2$. Sia invece, ad esempio, $\lambda > \lambda_0$. Calcolando y''_λ dall'equazione, si vede che y_λ è convessa su tutto $\mathbb{R}$; poiché $y'_\lambda(0) = 0$, ne segue che

$$\lim_{|t| \to +\infty} y_\lambda^2(t) = +\infty.$$

Dunque m_λ esiste finito per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Studiando il segno di y'_λ (o, alternativamente, il segno di h'_λ), è facile vedere che:

$$m_\lambda = \begin{cases} \lambda^2 & \text{se } \lambda \geq \lambda_0, \\ 0 & \text{se } \lambda \in [0, \lambda_0), \\ \lambda^2 & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

Esercizio 3. La matrice A dei coefficienti ha l'autovalore doppio $\lambda = 2$. Poiché A non è diagonale, segue che $(0, 0)$ è un nodo improprio (a una tangente) instabile. La direzione della tangente corrisponde al generatore $\boldsymbol{v}$ dell'autospazio associato a λ. Si può prendere ad esempio $\boldsymbol{v} = (1, -1)$. Per determinare l'equazione delle traiettorie si risolve il sistema

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{-x+y}{3x+y}.$$

Utilizzando il consueto metodo di risoluzione delle equazioni omogenee, si arriva a

$$\log(y+x) = \frac{2x}{y+x} + c,$$

o, se si preferisce, a

$$F_k(x, y) = y + x - k \exp\left(\frac{2x}{y+x}\right) = 0.$$

Un disegno qualitativo delle traiettorie si può ottenere calcolando le isocline $x' = 0$ e $y' = 0$, corrispondenti rispettivamente alle rette $y = -3x$ e $y = x$.

Esercizio 4. Chiaramente $P_1 = (0, 0, 0)$ è un punto di equilibrio del sistema. Se $P_2 = (x, y, z) \neq P_1$ è un altro punto di equilibrio, deve allora essere $x < 0, y < 0, z < 0$. Con una semplice sostituzione si arriva a vedere che (ad esempio) x deve risolvere l'equazione $x^8 + x = 0$, da cui $x = -1$. Conseguentemente, $P_2 = (-1, -1, -1)$ e non vi sono altri punti di equilibrio. Denotando con A_i le matrici dei coefficienti del sistema linearizzato nell'intorno di P_i, $i = 1, 2$, si vede che gli autovalori di A_1 sono le soluzioni di $\lambda^3 = 1$. Pertanto, si ha l'autovalore 1 e P_1 è instabile. Invece, gli autovalori di A_2 sono le soluzioni dell'equazione $(\lambda + 2)^3 = 1$, ossia

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad \lambda_3 = -\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

ed hanno tutti parte reale strettamente negativa. Dunque P_2 è un pozzo esponenziale nonlineare; in particolare, è asintoticamente stabile.