Corso di Equazioni Differenziali e Sistemi Dinamici

Prova scritta del 27 gennaio 2004

Esercizio 1. Detta y_λ la soluzione *massimale* del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{e^{t-y}}{y} \\ y(\lambda) = 1, \end{cases}$$

determinare il dominio di y_λ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Sia $y_\lambda(t)$, per $t > 0$, la soluzione massimale del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \sin\left(\frac{y(t)}{t}\right) \\ y(1) = \lambda. \end{cases}$$

(a) Tracciare, al variare di $\lambda \in [-2\pi, 2\pi]$, il grafico qualitativo di $y_\lambda(t)$ per $t \geq 1$.

(b) Dire se esiste il $\lim_{t\to 0^+} y_\lambda(t)$.

Esercizio 3. Si consideri, al variare di $n \in \mathbb{N}$, la famiglia di Problemi di Cauchy

$$\begin{pmatrix} x_n' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+1 & -n \\ 2n+2 & -n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_n(n) \\ y_n(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^n \\ 2e^n \end{pmatrix}.$$

Calcolare il $\lim_{n\to+\infty} \big(x_n(1) + y_n(1)\big)$.

Esercizio 4. Dato il sistema dinamico

$$\begin{cases} x' = -x^2 \\ y' = -y^2, \end{cases}$$

discutere la stabilità dei punti critici e determinare il comportamento qualitativo delle traiettorie.