Corso di Equazioni Differenziali e Sistemi Dinamici

Prova scritta del 24 febbraio 2004

Esercizio 1. Determinare l'espressione analitica e l'andamento qualitativo di tutte le soluzioni dell'equazione

$$y'(t) = y^2(t)\,\sin t.$$

Esercizio 2. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y'\,\sin t + y(1+\cos t) = 2\cos t + 2 \\ y(\pi/4) = 3 \\ y'(\pi/4) = 1. \end{cases}$$

Suggerimento. Usare soluzioni "di prova". Non occorre svolgere calcoli complicati.

Esercizio 3. (a) Studiare l'andamento qualitativo delle soluzioni dell'equazione

$$y'(t) = y(t) - \arctan t.$$

(b) Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione **strettamente crescente**, **limitata** e tale che $f(0) = 0$. Dimostrare che esiste **uno e un solo** numero $\lambda > 0$ tale che la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - f(t) \\ y(0) = \lambda. \end{cases}$$

ammette limite finito per $t \to +\infty$. Trovare inoltre una formula esplicita che lega λ alla funzione f.

Esercizio 4. Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ tale che $f(0) = 0$. Si consideri l'equazione differenziale

$$x'' + f(x)x' + x = 0. \tag{1}$$

(a) Posto $y(t) := x'(t)$, dimostrare che, se $x = 0$ è un punto di minimo relativo per f, allora $(x, y) = (0, 0)$ è un punto di equilibrio stabile per il sistema dinamico associato a (1).

(b) Dimostrare che se $x = 0$ è un punto di massimo relativo per f, allora $(x, y) = (0, 0)$ non può essere un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema dinamico associato a (1). Potrebbe, in questo caso, essere stabile ma non asintoticamente?