Corso di Equazioni Differenziali e Sistemi Dinamici

Prova scritta del 21 gennaio 2003

Esercizio 1. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Si consideri il problema di Cauchy

$$(P) \quad \begin{cases} y' = g(y^2) \\ y(0) = \lambda. \end{cases}$$

(a) Supponiamo che g verifichi la condizione

$$|g(r)| \leq |1 + r| \quad \forall\, r \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ possiamo concludere (per una *generica* g verificante (1)) che il dominio della corrispondente soluzione massimale y_λ di (P) è sicuramente tutto $\mathbb{R}$.

(b) Si risponda alla domanda precedente sostituendo la (1) con la

$$|g(r)| \leq |1 - r| \quad \forall\, r \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

(c) Si risponda alla domanda (a) sostituendo la (1) con la

$$r|g(r)| \leq |1 - r| \quad \forall\, r \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Esercizio 2. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t(-1 + \arctan y) \\ y(0) = \lambda \end{cases}$$

e sia y_λ la sua soluzione massimale. Si ponga $h_\lambda(t) := y_\lambda^2(t)$. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, calcolare, se esiste, $m_\lambda := \min\{h_\lambda(t), t \in \mathbb{R}\}$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + y. \end{cases}$$

Descrivere la natura del punto critico $(0, 0)$; determinare l'equazione delle traiettorie (è sufficiente scriverla nella forma implicita $F_k(x, y) = 0$ per k parametro reale) e tracciarne l'andamento qualitativo.

Esercizio 4. Si consideri il sistema nonlineare autonomo

$$\begin{cases} x' = x^2 + y \\ y' = y^2 + z \\ z' = z^2 + x. \end{cases}$$

Determinare i punti di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità.