EQUAZIONI DIFFERENZIALI E SISTEMI DINAMICI

Prova scritta del 17 maggio 2005

Esercizio 1. Si consideri il problema di Cauchy

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} y'(t) = t\sqrt{|y|}\,\operatorname{sign}(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} .$$

Esaminare per quali punti $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il problema (P) ammette un'unica soluzione massimale definita su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 2. Studiare punti critici e stabilità del seguente sistema non lineare

$$\begin{cases} x' = x(y^2 - 4) \\ y' = y(x^2 - 4) \end{cases} .$$

Inoltre, osservato che $(0,0)$ è punto critico e posto

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq |x| \leq 2, \quad 0 \leq |y| \leq 2\},$$

si determinino i punti $(x_0, y_0) \in Q$ tali che le traiettorie che passano per questi punti tendono a $(0,0)$ al tendere di t a $+\infty$. Si determinino infine eventuali orbite eterocline.