

Curriculum dell'attività scientifica e didattica

Giulio Fernando Schimperna

Dipartimento di Matematica, Università di Pavia

Via Ferrata, 1 – 27100 Pavia

3 settembre 2008

I. INFORMAZIONI GENERALI	2
II. DESCRIZIONE DELL'ATTIVITÀ DI RICERCA	7
III. ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI	22
IV. ATTIVITÀ DIDATTICA	26

I. Informazioni generali

Dati personali:

Data e luogo di nascita: 18 luglio 1972, Milano

Stato civile: coniugato, tre figlie

Indirizzo: via Terenzi n. 13, 27100 - Pavia

Telefono: 0382/576761 (casa), 0382/985654 (ufficio)

Fax: 0382/985602

E-mail: giusch04@unipv.it

Pagina web: <http://www-dimat.unipv.it/~giulio/>

Posizione attuale:

- Professore Associato, settore MAT/05 - Analisi Matematica; Facoltà di Scienze MM. FF. NN., Università di Pavia (dal 1 ottobre 2006).

Posizioni precedenti:

- Titolare di assegno di ricerca; Dipartimento di Matematica, Università di Pavia (dal 1 gennaio 2000 al 31 gennaio 2001).
- Ricercatore, settore MAT/05 - Analisi Matematica; Facoltà di Scienze MM. FF. NN., Università di Pavia (dal 1 febbraio 2001 al 30 settembre 2006).

Studi superiori ed universitari:

- Liceo Classico Statale G. Carducci (Milano) (dal 1985 al 1990). Maturità Classica conseguita nel luglio 1990 con votazione di 60/60.
- Alunno del Collegio Ghislieri di Pavia (dal 1990 al 1995).
- Corso di Laurea in Matematica presso l'Università di Pavia (dal 1990 al 1995). Laurea in Matematica conseguita il 17 gennaio 1995 con votazione di 110 e lode e con tesi "STUDIO DI UN PROBLEMA DI FRONTIERA LIBERA DI TIPO VORTICE IN SPAZI DI FUNZIONI ANALITICHE", relatore Alessandro Torelli.
- Corso di Dottorato in Matematica presso l'Università di Milano (XI ciclo) (dal 1995 al 1999). Titolo di Dottore di Ricerca in Matematica conseguito il 18 gennaio 2000 con tesi "TRANSMISSION PROBLEMS FOR NONLINEAR PARABOLIC SYSTEMS OF PHASE-FIELD TYPE", relatore Gianni Gilardi.

Altre esperienze:

- Corso di Orientamento Preuniversitario organizzato a Cortona dalla Scuola Normale Superiore di Pisa (settembre 1989).
- Servizio Civile presso la Fondazione "Il Melo" di Gallarate (dal 20 giugno 1995 al 19 giugno 1996).

Borse di studio, riconoscimenti e premi:

- Vincitore della borsa di studio CNR n. 209.01.60 per laureandi in matematica (ma costretto a rinunciare per ragioni tecniche).
- Vincitore del premio di studio “Vittorio Emanuele Galafassi” per la miglior tesi di laurea in matematica discussa presso l’Università di Pavia nel biennio solare 1994-1995.

Conferenze su invito a workshops o congressi:

- Workshop internazionale “Multiscale Problems and Phase Transitions” (WIAS - Berlino, 29-31/8/2001): “EXISTENCE AND ASYMPTOTIC RESULTS FOR SOME NON-LINEAR CAHN-HILLIARD-LIKE EQUATIONS”.
- Incontro nazionale: “Recenti Sviluppi nella Teoria delle Equazioni Differenziali” (Bologna, 19-20/4/2002): “PROBLEMI DI STEFAN RILASSATI PER LA TEMPERATURA ASSOLUTA”.
- Assemblea scientifica GNFM (Montecatini Terme, 17-19/2/2003): “UN MODELLO DI DANNEGGIAMENTO PER MATERIALI ELASTICI”.
- PV-MI 2003, Seconda Giornata di Studio Università di Pavia - Politecnico di Milano “Equazioni Differenziali e Calcolo delle Variazioni” (Milano, 11/12/2003): “ATTRATTORE UNIVERSALE PER MODELLI DI PENROSE-FIFE PARABOLICI E PARABOLICI-IPERBOLICI”.
- Workshop internazionale “Evolution equations: Inverse and Direct Problems” (Cortona, 21-25/6/2004): “DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR CONSERVED PHASE FIELD SYSTEMS WITH MEMORY”.
- Workshop internazionale “Inverse and Direct Problems” (Cortona, 20-24/6/2005): “SOME RESULTS ON DOUBLY NONLINEAR PARABOLIC PROBLEMS”.
- Workshop internazionale “Dynamics of Phase Transitions” (Berlino, WIAS, 30/11-3/12/2005): “WELL-POSEDNESS AND ω -LIMIT SETS FOR SOME DOUBLY NONLINEAR PARABOLIC PROBLEMS”.
- Workshop internazionale “AIMS’ Sixth International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications” (Poitiers, 25-28/6/2006): “ATTRACTORS FOR DOUBLY NONLINEAR EQUATIONS”.
- Workshop internazionale “AIMS’ Sixth International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications” (Poitiers, 25-28/6/2006): “ON THE LONG TIME BEHAVIOR OF SOME SINGULAR PHASE CHANGE MODELS”.
- Workshop internazionale su “Free Boundary Problems” (Chiba, Giappone, 26-30/11/2007): “HYPERBOLIC RELAXATION OF THE CAHN-HILLIARD EQUATION”.
- Workshop internazionale “AIMS’ Seventh International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications” (Arlington, TX, 18-21/5/2008): “ON THE LONG TIME BEHAVIOR OF SOME VARIANTS OF THE CAHN-HILLIARD EQUATION”.
- Workshop internazionale “AIMS’ Seventh International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications” (Arlington, TX, 18-21/5/2008): “ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOME SINGULAR PHASE TRANSITION SYSTEMS”.

Comunicazioni a workshops o congressi:

- Workshop internazionale “Phase Change with Convection: Modelling and Validation” (Varsavia, 24-26/6/1999): “CONVERGENCE OF PHASE-FIELD EQUATIONS TO THE STEFAN MODEL”.
- XVI Congresso UMI (Napoli, 13-18/9/1999): “UN PROBLEMA DI PHASE-FIELD CONSERVATO CON MEMORIA”.
- Workshop internazionale “Phase Transitions and Interfaces in Evolution Equations” (S.ta Margherita Ligure, 14-18/2/2000): “SOME RESULTS ON IRREVERSIBLE PHASE CHANGE MODELS”.
- Giornate di studio su “Equazioni Integrodifferenziali alle Derivate Parziali e Applicazioni” (Salò, 23-24/6/2000): “ALCUNI RISULTATI SUL MODELLO DI PHASE FIELD CONSERVATO CON MEMORIA”.
- Workshop nazionale “Simmetrie, Forme Geometriche, Evoluzione, e Memoria nelle Equazioni alle Derivate Parziali” (Taormina, 7-10/2/2001): “MODELLI DI CAMPO DI FASE CONSERVATIVI CON MEMORIA”.
- Workshop nazionale “Problemi a Frontiera Libera” (Montecatini, 14-15/6/2001): “ANALISI DI UN MODELLO DI SEPARAZIONE DI FASE IN LEGHE BINARIE”.
- Workshop nazionale “Modelli Matematici e Problemi Analitici per Materiali Speciali” (Cortona, 25-29/6/2001): “TRANSIZIONI DI FASE IRREVERSIBILI: MODELLIZZAZIONE E RISULTATI MATEMATICI”.
- Workshop internazionale “Fourth European Conference on Elliptic and Parabolic Problems - Theory and Applications” (Gaeta, 24-28/9/2001): “A PHASE CHANGE SYSTEM IN BINARY ALLOYS”.
- Workshop internazionale “Free Boundary Problems: Theory and Applications” (Trento, 5-8/6/2002): “LOCAL SOLUTION TO FRÉMOND’S MODEL FOR DAMAGE IN ELASTIC MATERIALS” (poster session).
- Incontro nazionale “Modelli Matematici e Problemi Analitici per Materiali Speciali” (Salò, 4-6/7/2002): “LIMITI SINGOLARI DI UN MODELLO DI PENROSE-FIFE CON MEMORIA”.
- Workshop nazionale “Free Boundary Problems in the Applied Sciences” (Montecatini Terme, 10-11/4/2003): “CONTINUOUS DEPENDENCE AND ASYMPTOTIC ANALYSIS FOR SOME SYSTEMS OF PENROSE-FIFE TYPE”.
- Incontro nazionale “Materiali Speciali e Memorie: Problemi Modellistici e Analitici” (Salò, 3-5/7/2003): “ALCUNI RISULTATI SULL’EQUAZIONE DI CAHN-HILLIARD CON MOBILITÀ NON COSTANTE”.
- XVII Congresso UMI (Milano, 8-13/9/2003): “ESISTENZA DELL’ATTRATTORE UNIVERSALE PER ALCUNI MODELLI DI PENROSE-FIFE”.
- Congresso internazionale “FBP 2004 – Free Boundary Problems in Biomathematics, Multiscaling, Infinite-Dimensional Dynamical Systems” (Montecatini, 10-12/6/2004): “NONISOTHERMAL PHASE SEPARATION MODELS BASED ON A MICROFORCE BALANCE”.
- “EVEQ 2004 – Sixth International Summer School on Evolution Equations (Praga,

12-16/7/2004): “SOME RESULTS ON PDE’S SYSTEMS FOR DAMAGING PHENOMENA”.

- Workshop internazionale “Dissipative models in phase transitions” (Cortona, 5-11/9/2004): “LONG TIME BEHAVIOR OF CAGINALP’S MODEL WITH SINGULAR POTENTIAL”.
- Workshop nazionale “Modellizzazione matematica ed analisi dei problemi a frontiera libera” (Montecatini, 29/9-1/10/2005): “ON A NONLOCAL PARABOLIC-HYPERBOLIC PHASE FIELD MODEL”.
- Workshop internazionale “Mathematical Models and Analytical Problems for Special Materials” (Salò, 13-15/7/2006): “ATTRACTORS FOR CAHN-HILLIARD EQUATIONS WITH NONCONSTANT MOBILITY”.
- XVIII Congresso UMI (Bari, 24-29/9/2007): “RILASSAMENTO IPERBOLICO DELL’EQUAZIONE DI CAHN-HILLIARD”.

Conferenze tenute presso università o istituti di ricerca:

- Dipartimento di Matematica, Università di Trento (3/4/2000): “ALCUNI MODELLI DI TRANSIZIONE DI FASE”.
- IMATI-CNR, Pavia (7/12/2000): “MODELLI DI SEPARAZIONE DI FASE IN SOLIDI SOGGETTI A FORZE TERMOELASTICHE”.
- Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Berlino (13/12/2000): “SOME RESULTS ON PHASE SEPARATION MODELS WITH THERMOELASTIC EFFECTS”.
- Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the Czech Republic, Praga (9/3/2004): “GLOBAL ATTRACTORS FOR SINGULAR PHASE CHANGE SYSTEMS OF PENROSE - FIFE TYPE”.
- Département Mathématique, Université Paris Sud 11 (7/9/2006): “ATTRACTORS FOR A CLASS OF DOUBLY NONLINEAR EQUATIONS”.

Soggiorni presso università o istituti di ricerca all’estero:

- Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Berlino (11-17/12/2000).
- Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the Czech Republic, Praga (1/3-31/5/2004 e 18-24/7/2005).
- Université de Poitiers (1-14/6/2008).

Organizzazione di workshops o congressi:

- Workshop internazionale “Evolution Problems – in memory of Brunello Terreni” (Rapallo, 26-27/3/2004): membro del comitato organizzatore.
- Workshop internazionale “Direct and Inverse Problems in Evolution Equations” (Rimini, 17-19/3/2005): membro del comitato organizzatore.

Attività di referee per le seguenti riviste:

- Journal of Integral Equations and Applications
- Central European Journal of Mathematics

- Journal of Mathematical Analysis and Applications
- Mathematical Methods in the Applied Sciences
- SIAM Journal on Mathematical Analysis
- Mathematical Models and Methods in Applied Sciences
- Communications on Pure and Applied Analysis
- Journal of Hyperbolic Equations
- Discrete and Continuous Dynamical Systems
- Set-Valued Analysis
- Applications of Mathematics.

Coordinamento di progetti di ricerca:

- Coordinatore del Progetto GNAMPA 2008 “Equazioni di evoluzione nelle scienze dei materiali come sistemi dinamici infinito-dimensionali”.
- Coordinatore del Progetto 2008 “Modelli matematici in scienza dei materiali – Modèles mathématiques en science des matériaux” nell’ambito del “Programma Galileo” di cooperazione scientifica Italia-Francia (il coordinatore della parte francese del progetto è il Professor Alain Miranville dell’Università di Poitiers).

II. Descrizione dell'attività di ricerca

Si può suddividere nei due seguenti filoni principali, peraltro per molti aspetti collegati:

A) Analisi di sistemi di equazioni alle derivate parziali legati ad applicazioni fisiche o ingegneristiche. Si sono studiate equazioni o sistemi di equazioni differenziali, o talora integro-differenziali, alle derivate parziali relative a modelli di transizione di fase, diffusione termica (anche con effetti di memoria), separazione delle componenti in leghe metalliche, elasticità o viscoelasticità, danneggiamento di materiali. Come tipologia di problemi, in molti casi si è partiti proprio con la derivazione dei modelli sulla base di considerazioni fisico-matematiche (spesso principi variazionali). Quindi, la parte centrale del lavoro svolto è consistita nell'analizzare opportuni problemi ai valori iniziali e al contorno per i sistemi di equazioni che si erano ricavati. Nella maggior parte dei casi si sono affrontate le questioni classiche di buona positura, analizzando l'esistenza, l'unicità o nonunicità, e la regolarità delle soluzioni in un opportuno quadro funzionale.

B) Comportamento asintotico per tempi lunghi e sistemi dinamici infinito-dimensionali. Nota la buona positura di un certo sistema di equazioni alle derivate parziali di tipo evolutivo, le relative soluzioni possono essere interpretate come traiettorie di un sistema dinamico che evolvono a partire dalla condizione iniziale. Ha dunque senso, ed è scopo della teoria dei sistemi dinamici infinito-dimensionali, costruire oggetti atti a caratterizzare il comportamento per tempi lunghi di tale sistema dinamico, quali ad esempio ω -limiti, attrattori globali, attrattori esponenziali, varietà inerziali. In questo quadro, si è cercato di adattare ed applicare questo tipo di strumenti a problemi che fossero anche significativi nelle applicazioni fisiche.

A livello di cronologia, si può dire che i lavori più vecchi appartengono al primo filone (modellistica e analisi di EDP), mentre in seguito ci si è maggiormente specializzati nella teoria dei sistemi dinamici infinito-dimensionali (secondo filone).

Si passa ora a descrivere in modo più dettagliato i problemi affrontati e i principali risultati ottenuti. L'esposizione che segue è suddivisa per argomenti di ricerca; si è comunque cercato, per quanto possibile, di descrivere questi rispettando l'ordine cronologico.

1) Problemi di trasmissione e limiti singolari per il modello di phase field: lavori [1, 2, 3, 4, 47].

Durante il corso di Dottorato (vedi la tesi [47]) sono stati studiati alcuni problemi analitici relativi al cosiddetto sistema di “campo di fase” (o “*phase field*”), che presentiamo in dettaglio perché verrà ripreso più volte anche nel seguito. Esso è dato dalle due equazioni paraboliche

$$\theta_t + \chi_t - \Delta\theta = f, \quad (1)$$

$$\mu\chi_t - \nu\Delta\chi + W'(\chi) = \theta, \quad (2)$$

ove le incognite sono la temperatura θ e il “parametro d'ordine” χ , che descrive

la proporzione tra due fasi o componenti di un sistema binario (si pensi ad esempio ai fenomeni di cambiamento di stato fisico). Come di consueto, il termine f nell'equazione (1) di “bilancio energetico” indica una sorgente di calore; per quanto riguarda l'equazione “cinetica” (2), $\mu, \nu > 0$ sono parametri di rilassamento e W' costituisce la derivata del potenziale di configurazione del sistema, che in genere non è convesso e può avere più minimi. Anche per scopi successivi, vale la pena classificare i potenziali W in due categorie: parleremo di potenziale “regolare”, quando W è una funzione liscia definita sull'intera retta reale; diremo invece che W è “singolare” o è un “vincolo”, quando è definito solo su un intervallo limitato I che supporremo per semplicità essere dato da $I = (-1, +1)$ oppure da $I = [-1, 1]$ (al di fuori di I , W può essere considerato convenzionalmente pari a $+\infty$). Il senso di tale scelta è che i valori ± 1 rappresentano gli stati puri del sistema (per esempio solido e liquido), i valori strettamente compresi tra -1 e $+1$ gli stati intermedi e i valori al di fuori di I vengono penalizzati non essendo fisicamente ammissibili. La scelta di W singolare è dunque più aderente alla realtà fisica, ma quasi sempre causa problemi dal punto di vista dell'analisi matematica.

Fatta questa premessa, nell'ambito del sistema (1–2), su cui la letteratura recente è piuttosto copiosa, si è affrontato uno specifico problema relativo alla trasmissione del calore tra due diverse sostanze poste in due domini adiacenti Ω_1 e Ω_2 . In effetti, la presenza di due materiali con differenti caratteristiche fisiche aggiunge alla difficoltà intrinseca del modello un “salto” dei coefficienti (ad esempio μ, ν , ma anche la funzione W) in corrispondenza della superficie di contatto. L'approccio usato è consistito nello studiare una formulazione variazionale astratta del sistema che fosse abbastanza generale da ammettere la discontinuità dei coefficienti.

In questo modo, sono stati dimostrati vari teoremi di esistenza, unicità e regolarità della soluzione [4], tramite l'utilizzo di tecniche di discretizzazione in tempo - stime a priori - compattezza. L'analisi del problema di trasmissione [4] segue poi come conseguenza dei risultati astratti una volta che si siano precisate ed analizzate opportune condizioni di compatibilità tra i parametri relativi ai due diversi materiali. La principale difficoltà è costituita dalla trattazione del potenziale W . In effetti, nel caso di W singolare è stato necessario limitarsi a considerare una classe di soluzioni molto deboli.

Un'ulteriore applicazione dei risultati di [4] riguarda un problema di “capacità concentrata” [1], dove si immagina che una delle due sostanze (ad esempio quella situata in Ω_2) occupi uno strato sottile adiacente al dominio Ω_1 dove è posto l'altro materiale e presenti valori di conducibilità molto grandi. In effetti, la terminologia “capacità concentrata” indica che lo spessore dello strato viene direttamente supposto nullo nell'analisi e dunque si immagina che Ω_2 degeneri in una regione $\Gamma_2 \subset \partial\Omega_1$. Ne risulta quindi un accoppiamento tra un sistema parabolico su un dominio materiale ed un altro sistema, anch'esso parabolico, su una parte del bordo di questo. In queste condizioni, la difficoltà aggiuntiva è dovuta all'impossibilità di impostare i due sistemi nel medesimo quadro funzionale, a causa della perdita di regolarità associata all'operatore di traccia che compare nella formulazione delle equazioni sul bordo.

In una seconda parte della tesi si sono anche studiati alcuni limiti singolari del problema di trasmissione ottenuti facendo variare e tendere a zero certi parametri fisici

relativi ad una sola delle due sostanze in contatto (ad esempio quella posta in Ω_2). In particolare, si sono ottenuti risultati di convergenza delle soluzioni nei casi in cui il sistema limite si riferisce ad un problema di trasmissione tra il modello di phase field nel materiale non perturbato e, rispettivamente:

- a) il modello di “phase relaxation” ($\nu \searrow 0$ in Ω_2),
- b) il modello di Stefan con energia di interfaccia [3] ($\mu \searrow 0$ in Ω_2),
- c) il modello di Stefan classico [2, 47] ($\mu, \nu \searrow 0$ e $\sigma' \rightarrow 0$ in Ω_2).

In queste analisi vengono ulteriormente enfatizzate le difficoltà legate alla discontinuità dei coefficienti sulla superficie di separazione tra le due sostanze. Dunque, per dimostrare tali risultati di convergenza è stato talora necessario utilizzare tecniche ad hoc che consentissero di controllare il carattere degenerare dell’equazione limite in Ω_2 . In particolare, nell’analisi del problema in [2, 47] si sono sviluppati alcuni opportuni strumenti di tipo Γ -convergenza. Infatti, le usuali tecniche di stime a priori - compattezza non parevano in grado, da sole, di garantire la possibilità di passare al limite.

2) Modelli di phase field con memoria: lavori [6, 7, 27]. Ricerca in collaborazione con P. Colli (Pavia), G. Gilardi (Pavia), M. Grasselli (Politecnico di Milano), A. Lorenzi (Milano), E. Rocca (Milano).

Sempre nell’ambito dei modelli di campo di fase, si è studiata la situazione in cui la trasmissione del calore è regolata da equazioni costitutive diverse dalla legge di Fourier, le quali tengono anche conto della “storia passata” della temperatura, che è assunta nota sino all’istante iniziale $t = 0$. L’esempio più semplice si ha quando per il *flusso di calore* $\mathbf{q}$ vale la legge

$$\mathbf{q}(t) = -(k * \nabla \theta)(t), \quad (3)$$

ove $k : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è un nucleo di memoria e $*$ indica l’usuale prodotto di convoluzione in $(-\infty, t]$. Ne risulta una legge di diffusione termica della forma

$$\theta_t + \chi_t - k * \Delta \theta = f \quad (4)$$

(si confronti con (1)), che, sotto opportune ipotesi su k , viene ad assumere carattere iperbolico.

Nell’ambito di questa situazione fisica, si è studiato un particolare modello ove la legge di evoluzione per χ risulta di tipo “conservato”: si suppone cioè che la sua media spaziale rimanga costante in tempo (si pensi ad esempio a situazioni in cui χ esprime una concentrazione: tale ipotesi corrisponde allora alla conservazione della massa). La corrispondente equazione risulta allora essere del quarto ordine:

$$\mu \chi_t - \Delta(-\nu \Delta \chi + W'(\chi) - \theta) = 0 \quad (5)$$

(si confronti con (2)). In questa ricerca si è affrontato un problema di tipo Neumann per il sistema (4-5). In aggiunta alla scarsa gamma di stime a priori disponibile a causa del carattere iperbolico di (4), un’ulteriore difficoltà è dovuta alla condizione di Neumann; infatti risulta complesso il controllo del termine $W'(\chi)$ a causa delle scarse informazioni sulla sua media spaziale. Utilizzando ancora tecniche di approssimazione

- stime a priori - compattezza, si sono ottenuti risultati di esistenza, unicità e regolarità della soluzione, ed anche una stima di dipendenza continua, in due casi fisicamente significativi [6, 7] distinti dalle diverse ipotesi strutturali sui dati.

Infine, questo tipo di modelli è stato ripreso in un lavoro più recente [27], ove si è analizzato un *problema inverso* per la versione *parabolica* e non conservata del sistema. Si è cioè considerato il sistema (2)+(4), ma con l'aggiunta di un termine $-k_0\Delta\theta$, $k_0 > 0$, a primo membro di (4), corrispondente ad un'opportuna modifica della legge (3). Per tale sistema, supponendo nota un'informazione aggiuntiva (di fatto un certo tipo di misurazione della temperatura), si è studiata la possibilità di *identificare* il nucleo k per il quale la soluzione soddisfasse tale condizione. Il risultato ottenuto è di tipo *globale in tempo*, ma *condizionale*, cioè valido solo a patto che la soluzione soddisfi opportune proprietà (essenzialmente di limitatezza), purtroppo non direttamente deducibili dal sistema. Questo è peraltro un fenomeno che si presenta usualmente nell'analisi di problemi inversi per sistemi di evoluzione non lineari, almeno quando si cercano soluzioni *in grande*. Si segnala che nella dimostrazione è stato necessario considerare soluzioni molto regolari del problema *diretto*; pertanto, una prima parte del lavoro, che si pensa possa avere interesse autonomo, è stata dedicata a raffinare i risultati di regolarità sul sistema (2)+(4) finora noti.

3) Modelli per transizioni di fase con movimenti microscopici: lavori [5, 8, 9, 11, 15, 21, 31, 45, 46]. Ricerca in collaborazione con P. Colli (Pavia), Ph. Laurençot (Tolosa), F. Luterotti (Brescia), U. Stefanelli (Pavia, IMATI).

In questa serie di lavori si sono studiati diversi problemi analitici relativi ad una generalizzazione del sistema di phase field riconducibile a un quadro modellistico recentemente proposto da M. Frémond attraverso un'analisi "a due scale" del fenomeno. In particolare, si vede il cambiamento "macroscopico" di stato come un effetto dei movimenti delle particelle microscopiche che costituiscono la sostanza, movimenti che portano un contributo non trascurabile nell'equazione di bilancio termico. Analogamente, l'evoluzione del parametro di fase (equazione "microscopica") risente dell'effetto "macroscopico" portato dalla temperatura. Una forma generale ("full model") di questo tipo di modelli è fornita dal seguente sistema di EDP:

$$\theta_t + \theta\chi_t - \Delta\theta = \mu\chi_t^2, \quad (6)$$

$$\alpha(\chi_t) + \mu\chi_t - \nu\Delta\chi + W'(\chi) = \theta, \quad (7)$$

ove per semplicità si è trascurato il termine f di sorgente che si aveva in (1), assumendo dunque che il sistema sia completamente isolato dall'esterno. Per questo motivo, anche le condizioni al bordo sono in tutti questi lavori di tipo Neumann omogeneo per entrambe le incognite.

Rispetto a (1-2), compaiono qui due termini non lineari nella prima equazione, effetto dei movimenti microscopici; inoltre, si può avere un termine di vincolo $\alpha(\chi_t)$ in (7), che viene introdotto per forzare χ_t ad avere un segno. Questa scelta serve a descrivere, in un quadro termodinamicamente rigoroso, il comportamento di sostanze ove è consentita la transizione (ad esempio) dal liquido al solido, ma non il viceversa. In questo caso, si sceglie $\alpha = \partial I_{[0,+\infty)}$, ove $I_{[0,+\infty)}$ è l'*indicatrice* di $[0, +\infty)$. Parliamo allora di cambiamenti di fase "unidirezionali" o "irreversibili" (senza peraltro alcun

legame col concetto usuale di irreversibilità in Termodinamica). Si noti inoltre che qui $\theta > 0$ è la temperatura *assoluta*, e in effetti il termine strettamente positivo χ_t^2 a secondo membro di (6) ha il ruolo di una forzante che impedisce a θ di scendere sotto 0 (zero assoluto). Oltre alla maggiore generalità, un ulteriore vantaggio dal punto di vista fisico del sistema (6–7) è infatti la consistenza termodinamica per una vasta gamma di valori di temperatura (e non solo nell’intorno della temperatura critica, come pare essere per altri modelli “imparentati” con (1–2)). Si osservi peraltro che la positività di θ (necessaria per poter dimostrare la consistenza termodinamica) non è leggibile direttamente dal sistema (6–7), ma è di fatto una proprietà non banale, recentemente provata in [31] per una classe di modelli anche più generale di quella qui descritta.

La presenza di diversi termini nonlineari nel sistema (6–7) ne rende piuttosto complicata un’analisi matematica rigorosa. In particolare, a causa della nonlinearietà quadratica in (6), mentre è relativamente semplice ottenere un risultato di esistenza locale in tempo per il sistema completo [45], ben più ardua è la questione dell’esistenza globale. Da un punto di vista fisico, questa pare avere grande rilevanza; infatti l’esistenza globale ci direbbe che i termini quadratici in (6) mantengono sì θ lontana dallo zero assoluto, ma non comportano un’esplosione in tempi finiti della soluzione, il che sarebbe irragionevole dato che il sistema è isolato e si ha a disposizione una stima di conservazione dell’energia (ossia un integrale primo). Tuttavia, fino a questo punto, l’esistenza globale è stata ottenuta per il sistema completo (6–7) soltanto in due situazioni, e precisamente: nel caso monodimensionale in spazio [11], ovvero imponendo “a priori” una limitazione superiore alla velocità del processo di transizione di fase [9] tramite un’opportuna modifica dell’espressione del vincolo α , la quale peraltro non risulta distruggere la consistenza termodinamica del modello.

In una seconda serie di lavori, si sono affrontate delle formulazioni matematiche in qualche modo semplificate del sistema (6–7), per le quali si sono ottenuti diversi teoremi di esistenza (globale) e regolarità. Entrando nel dettaglio dei risultati, in [5] (ove si è anche fornita una dettagliata derivazione fisica del modello), si è trascurato il termine χ_t^2 in (6), sulla base dell’ipotesi che questo abbia un ordine di grandezza inferiore rispetto agli altri termini. In [8] si è invece supposto nullo il termine di diffusione relativo alla variabile di fase, ponendo $\nu = 0$ in (7). Il modello che ne deriva, che è pienamente compatibile col quadro termodinamico generale e ne conserva il comportamento nonlineare, risulta essenzialmente una versione nonlineare del cosiddetto sistema di “phase relaxation” proposto da Frémond e Visintin negli anni ’80. Questo tipo di sistemi è anche strettamente legato alla modellizzazione di fenomeni di isteresi, relazione che è stata resa precisa (e studiata rigorosamente), per questa formulazione nonlineare, in [15]. Infine, si è analizzata una versione quasistazionaria del “full model” [21], ottenuta sopprimendo il termine di rilassamento temporale relativo al parametro di fase ($\mu = 0$ in (7)): il teorema di esistenza che si è ottenuto, relativo peraltro al caso unidimensionale, sembra avere particolare interesse perché una linearizzazione attorno alla temperatura critica del sistema affrontato in [21] è strettamente legata alla formulazione debole del problema di Stefan e fornisce un’ulteriore relazione tra questo tipo di problemi e altri modelli più classici e studiati nella letteratura scientifica recente.

Per quanto riguarda le tecniche di dimostrazione, ci si è basati su svariate tec-

niche di approssimazione e di punto fisso. Tipicamente si è dapprima stabilito un risultato d'esistenza per un problema approssimante; quindi il passaggio al limite è stato raggiunto attraverso metodi di compattezza e semicontinuità. Si noti infine che alcune tecniche di discretizzazione si prestano anche ad essere implementate numericamente.

4) Perturbazione di domini per equazioni ellittiche: lavoro [12]. Ricerca in collaborazione con G. Savaré (Pavia).

Si è analizzata la dipendenza della soluzione di un'equazione lineare ellittica del secondo ordine rispetto a perturbazioni del dominio. Più in dettaglio, dato un generale operatore ellittico $\mathcal{A}$ e date due soluzioni variazionali del problema di Dirichlet omogeneo

$$u \in H_0^1(\Omega_i), \quad \mathcal{A}u = f \quad \text{in } \Omega_i, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

supportate su domini diversi Ω_1, Ω_2 , si sono ottenute stime della loro differenza sia nella norma dell'energia che in quella L^2 . Tali stime vengono a dipendere dalle norme naturali dei dati, da costanti legate alla geometria dei domini e da un'opportuna nozione di distanza tra questi. Le condizioni di regolarità sotto le quali si è riusciti ad ottenere tali stime richiedono che almeno uno dei domini (e.g., Ω_1) sia di regolarità Lipschitz; Ω_2 può avere regolarità arbitraria, purché sia "sufficientemente vicino" al primo dominio. Più precisamente, si richiede un controllo sulla distanza di Hausdorff delle frontiere; in questo modo, si riesce a comparare la soluzione sul dominio irregolare Ω_2 con la soluzione supportata su un intorno opportuno del dominio regolare Ω_1 .

Il metodo utilizzato scompone il problema in varie fasi: si è dapprima inquadrata la questione in ambito astratto, riconducendo le stime desiderate a questioni di distanza tra la soluzione supportata su Ω_1 ed un generico spazio $H_0^1(\Omega)$, con Ω non necessariamente coincidente con Ω_2 , ma in certa misura arbitrario. Quindi, il calcolo di tale distanza è stato riportato a un problema geometrico, che viene affrontato utilizzando una tecnica di localizzazione (una variante del classico metodo delle traslazioni di Nirenberg), originariamente sviluppata da G. Savaré in una situazione di maggiore regolarità e qui opportunamente adattata al caso Lipschitz. Attraverso un tale approccio, si sono ottenute anche stime più accurate sotto migliori ipotesi di regolarità sui dati o sui domini (valide per esempio nel caso in cui Ω_1 e Ω_2 sono entrambi Lipschitz).

5) Modelli di separazione in leghe binarie con transizione di fase: lavori [17, 44]. Ricerca in collaborazione con D. Kessler, J.F. Scheid (Nancy), U. Stefanelli (Pavia, IMATI).

Si è studiato un modello di campo di fase relativo ad una lega binaria caratterizzata dalla presenza di due parametri d'ordine: una variabile di fase χ , che descrive la transizione solido-liquido, e una di concentrazione c , che descrive la proporzione tra le due componenti metalliche. Innanzitutto si è effettuata la derivazione fisica del relativo modello a partire da un principio variazionale. Nelle ipotesi che il fenomeno sia essenzialmente isoterma, che le componenti tendano a separarsi (minore energia in prossimità delle configurazioni pure), e che vi sia conservazione di massa, si è così

ottenuto il seguente sistema di due equazioni paraboliche

$$\mu\chi_t - \nu\Delta\chi = F_1(\chi) + cF_2(\chi), \quad (9)$$

$$c_t - \operatorname{div} \left[m(\chi, c) \nabla (-\nu\Delta c + W'(c) + g(\chi)) \right] = 0, \quad (10)$$

rispettivamente del secondo (per la fase) e del quarto ordine (per la concentrazione), corredato da condizioni al bordo di flusso nullo. Anche in questo caso, W ha carattere singolare; un'ulteriore difficoltà è dovuta al coefficiente di mobilità m , il quale può dipendere da entrambe le variabili (anche se è assunto limitato e non degenerare). Le nonlinearità F_1 , F_2 e g sono invece supposte più regolari (Lipschitz) e risultano dunque più facili da trattare.

In [17] si è provato un teorema di esistenza globale per il sistema (9–10) sotto ipotesi abbastanza generali sui dati e sul coefficiente di mobilità. Per quanto riguarda la regolarità, sono stati ottenuti diversi risultati assumendo condizioni più restrittive sui dati e supponendo m costante. In una tale situazione si ha anche l'unicità della soluzione. Questi risultati (regolarità e unicità) sono stati parzialmente estesi in [44] al caso di una mobilità dipendente dalla soluzione. In [17] è stata anche effettuata un'analisi asintotica del problema al tendere a zero di ν e della parte antimonotona di W' , mostrando la convergenza dell'equazione (10) a un problema di tipo Hele-Shaw.

6) Modelli di “coarsening” (ispessimento) in materiali elastici anisotropi: lavori [10, 13]. Ricerca in collaborazione con E. Bonetti (Pavia), P. Colli (Pavia), W. Dreyer (Berlino, WIAS), G. Gilardi (Pavia), J. Sprekels (Berlino, WIAS).

Si è analizzato un modello matematico relativo al processo di “coarsening” (si può tradurre con “ispessimento”) proprio di talune leghe metalliche. Tale fenomeno consiste nella formazione, all'interno della lega metallica, di regioni in cui una delle due componenti è molto prevalente (in genere *quasi* pura) e nella successiva evoluzione delle stesse, che tendono a crescere di dimensioni. Durante questo fenomeno si verificano effetti elastici dovuti alle tensioni interne generate dall'interazione tra le diverse strutture cristalline delle componenti. Tali effetti determinano, tra l'altro, la geometria delle regioni in evoluzione. Un modello matematico di tale processo è stato recentemente proposto da W. Dreyer e W. Müller e consta di un sistema di tipo elasticità lineare (con tensore elastico C dipendente dalla concentrazione χ) per lo spostamento $\mathbf{u}$:

$$-\operatorname{div} (C(\chi)\varepsilon(\mathbf{u})) = \mathbf{f}(\chi) \quad (11)$$

(ove $\varepsilon(\mathbf{u})$ è la deformazione simmetrizzata), accoppiato ad una relazione parabolica del quarto ordine (vi è conservazione di massa) per la concentrazione χ :

$$\mu\chi_t - \Delta(\delta\chi_t - a(\chi)\Delta\chi + W'(\chi) + \gamma(\chi, \varepsilon(\mathbf{u}))) = 0. \quad (12)$$

Rispetto ai modelli di campo di fase più usuali, l'equazione (12) presenta due grosse difficoltà: la nonlinearità $a(\chi)$, legata alle diverse proprietà delle componenti, che caratterizza il termine di ordine più alto, e il termine di accoppiamento $\gamma(\chi, \varepsilon(\mathbf{u}))$ che può avere dipendenza quadratica da $\varepsilon(\mathbf{u})$.

Per quanto riguarda i risultati, si sono ottenute l'esistenza globale e l'unicità della soluzione per il sistema completo (11–12) in una dimensione di spazio [10] utilizzando tecniche di punto fisso (Schauder) e compattezza. Sotto ipotesi più restrittive, questi risultati sono stati parzialmente estesi al caso bidimensionale. Le restrizioni sulla dimensione sono dovute alla presenza del termine γ e sono usuali in questo tipo di sistemi con accoppiamento quadratico. Nel lavoro [13] si è quindi analizzata la sola equazione (12), nella quale il termine γ derivante dagli sforzi elastici è stato assunto essere un dato sufficientemente regolare. In questa situazione si sono ottenuti ulteriori risultati di esistenza (anche nel caso tridimensionale); inoltre, si sono studiati alcuni limiti singolari fisicamente significativi dell'equazione (12); in particolare, si è mostrato che la classica equazione di Cahn-Hilliard può essere ottenuta come limite della (12).

7) Modelli di danneggiamento: lavori [18, 25]. Ricerca in collaborazione con E. Bonetti (Pavia), A. Segatti (Pavia).

Si è studiato un modello matematico, essenzialmente dovuto a M. Frémond, che descrive il progressivo danneggiamento di mezzi elastici (per esempio, polimeri o materiali per costruzioni). Come nei modelli descritti al punto 3), si assume che tale processo, descritto da una variabile di stato χ (ove $\chi = 1$ indica il materiale integro e $\chi = -1$ il materiale completamente danneggiato), sia dovuto all'effetto dei movimenti microscopici interni al materiale. I movimenti macroscopici, descritti dalla variabile $\mathbf{u}$, generano invece tensioni di tipo elastico. Il modello risultante descrive l'interazione tra le diverse scale spaziali: le forze macroscopiche deteriorano il materiale e provocano il danneggiamento; corrispondentemente, il materiale ha una minore risposta alle sollecitazioni elastiche. Il sistema studiato ha la forma generale seguente:

$$\omega \mathbf{u}_{tt} - \operatorname{div} [C(\chi)(\varepsilon(\mathbf{u}) + \tau \varepsilon(\mathbf{u}_t))] = \mathbf{f}, \quad (13)$$

$$\mu \chi_t + \alpha(\chi_t) - \delta \Delta \chi_t - \nu \Delta \chi + W'(\chi) = w - \frac{1}{2} (C'(\chi) \varepsilon(\mathbf{u})) : \varepsilon(\mathbf{u}), \quad (14)$$

ove ω, τ, δ sono parametri non negativi e il tensore elastico $C(\chi)$ degenera quando il danneggiamento è totale ($\chi = -1$). Si noti la presenza dei due vincoli W' (che forza $\chi \in [-1, 1]$) e α (che forza $\chi_t \in (-\infty, 0]$). Partendo dalla condizione iniziale $\chi(0) \equiv 1$ (materiale completamente integro), si assume dunque che il danno, una volta prodotto, non possa più essere riparato. È evidente che la presenza simultanea dei due vincoli produca notevoli difficoltà analitiche. Infine, il termine $w > 0$ è una costante che rappresenta l'energia di coesione del materiale: quanto più w è grande, tanto più il materiale resiste al deterioramento.

Per questi modelli si sono ottenuti soltanto risultati di esistenza locale in tempo, utilizzando nelle dimostrazioni il teorema di punto fisso di Schauder; il carattere locale delle soluzioni è legato al fatto che si vuole evitare che il tensore elastico degeneri. Dunque, ci si è limitati a considerare un intervallo temporale (di ampiezza descritta dalle stime a priori ed effettivamente computabile in funzione dei dati) in cui il danneggiamento non è totale in alcun punto. In particolare, in [18] si è analizzato il caso elastico *quasistazionario* ($\omega = \tau = 0$ in (13)), ove tuttavia, per ragioni di regolarità, si è dovuta assumere non nulla la viscosità in (14) ($\delta > 0$), cosa che non pare del tutto soddisfacente dal punto di vista modellistico. Tale condizione si è potuta eli-

minare (prendendo dunque $\delta = 0$) nel caso *viscoelastico dinamico* ($\omega, \tau > 0$ in (13)) analizzato in [25] e probabilmente più aderente alla situazione fisica reale (anche se tecnicamente più complesso dal punto di vista analitico). Alcune delle tecniche usate nelle dimostrazioni si basano sui lavori sulle transizioni di fase con movimenti microscopici descritti al punto 3).

8) Modelli di tipo Penrose - Fife: lavori [14, 16, 19, 20, 22, 23, 29, 39]. Ricerca in collaborazione con P. Colli (Pavia), E. Feireisl (Praga, Accademia delle Scienze), G. Gilardi (Pavia), E. Rocca (Milano).

Il modello di Penrose-Fife descrive una particolare classe di fenomeni di transizione di fase attraverso un sistema di equazioni caratterizzate dalla presenza del reciproco della variabile θ , che indica qui la temperatura *assoluta*. Si deve cioè avere $\theta > 0$, e la temperatura critica (quella a cui avviene la transizione di stato) è un valore $\theta_c > 0$). Le equazioni del sistema hanno l'espressione

$$\theta_t + \chi_t - \Delta\alpha(\theta) = f, \quad (15)$$

$$\mu\chi_t - \nu\Delta\chi + W'(\chi) = -\frac{1}{\theta}. \quad (16)$$

Si noti la presenza di una funzione nonlineare α legata alla legge di flusso di calore, per la quale esistono varie scelte fisicamente significative. Ad esempio, α può essere lineare, come in nel caso standard (1), oppure può presentare anch'essa una dipendenza dalla temperatura inversa. Espressioni significative e fisicamente coerenti sono date in particolare da $\alpha(\theta) \sim -1/\theta$ e $\alpha(\theta) \sim \theta - 1/\theta$. I modelli di Penrose-Fife, come quelli descritti al punto 3), sono consistenti col Secondo Principio della Termodinamica per tutti i valori positivi di θ ; inoltre, essi “estendono” il sistema (1–2) nel senso che questo può essere ottenuto ricavato da (15–16) per linearizzazione attorno alla temperatura critica.

Per il modello di Penrose-Fife, anch'esso molto studiato nella letteratura recente, si sono affrontati diversi problemi specifici. Per prima cosa, si è considerato [14] il caso in cui si il flusso di calore è di tipo Fourier ($\alpha(\theta) = \theta$), ma l'equazione corrispondente a (16) è del quart'ordine (dinamica di tipo “conservato”, cfr. (5)). La difficoltà principale del problema sta nell'ottenere una stima a priori della temperatura inversa. Questa, infatti, non si può dedurre dall'equazione (15) (ora coincidente con (1)), ma va ricavata sfruttando l'equazione cinetica (16), e sarà dunque di carattere molto debole. Per questo problema si è dimostrata l'esistenza di una soluzione debole estendendo un risultato di Laurençot valido nel caso non conservato.

Successivamente [16], si è affrontato ancora il modello conservato, ma con legge di flusso della forma $\alpha(\theta) \sim \theta - 1/\theta$ (o generalizzazioni di questa) e ammettendo anche un termine di memoria termica (cfr. (4)). Per il corrispondente sistema di EDP, si è studiato il problema di limite singolare ottenuto facendo tendere a zero il parametro μ di rilassamento temporale relativo all'equazione cinetica. L'analisi è stata piuttosto complessa, perché per dimostrare il relativo risultato di convergenza si sono dovute assumere ipotesi molto forti sui dati iniziali, nonché analizzare la compatibilità di queste col problema quasistazionario ottenuto come limite.

In un terzo lavoro [19], si è analizzato un sistema di tipo non conservato nel

parametro di fase assumendo condizioni di Neumann non omogenee per la temperatura e considerando una generalizzazione della legge $\alpha(\theta) \sim \theta - 1/\theta$. Per tale modello, si è dimostrato un risultato di esistenza e unicità sotto ipotesi molto generali sui dati. La difficoltà consiste qui nel controllo della media spaziale della temperatura inversa, che non si può ottenere con una disuguaglianza di tipo Poincaré, ma va ricavato ancora una volta dall'equazione cinetica. In effetti, fino a questo momento in letteratura era stato affrontato soltanto il caso con sorgente termica a media nulla.

Gli ultimi sviluppi relativi all'analisi di questo tipo di modelli si inquadrano nel secondo filone di ricerca (analisi asintotica per tempi lunghi e sistemi dinamici infinito-dimensionali). Vale la pena osservare che l'approccio al sistema di Penrose-Fife tramite la teoria dei sistemi dinamici è tutt'altro che semplice a causa del carattere singolare dell'equazione di bilancio termico, e i risultati finora noti in letteratura sono pochi e parziali. I risultati ottenuti riguardano in prevalenza lo studio dell'attrattore globale del sistema. Inizialmente, ci si è soffermati sul caso (fisicamente significativo) della legge di flusso $\alpha(\theta) \sim \theta - 1/\theta$. Si tratta, almeno in quest'ottica, della situazione più semplice, dato che viene garantita la coercività dell'equazione (15) rispetto a θ , il che rende possibile ottenere una stima dissipativa rispetto al tempo della temperatura, ingrediente essenziale nella costruzione dell'attrattore. I risultati ottenuti valgono, con differenze non solo tecniche nelle dimostrazioni, nel caso del calore latente lineare [22] sia per il modello nonconservato sia per quello conservato; nel caso quadratico (quando si ha cioè un fattore $\lambda\chi$, $\lambda > 0$, che moltiplica sia la χ_t in (15) che il secondo membro di (16)) [20] solo per il sistema nonconservato.

Questi risultati sono stati estesi in [29], per la stessa legge di flusso di calore, ad un sistema di Penrose-Fife di tipo parabolico (in θ) - iperbolico (in χ), caratterizzato dalla presenza nel primo membro della (16) di un termine $\kappa\chi_{tt}$ legato ad un effetto di ritardo nella risposta del sistema alla sollecitazione che determina il cambiamento di stato. Anche in questo caso, si è provata l'esistenza dell'attrattore universale; tuttavia la dimostrazione comporta nuove e notevoli difficoltà tecniche e richiede l'uso di un quadro funzionale decisamente *ad hoc* a causa dell'assenza di un effetto regolarizzante nell'equazione *iperbolica* corrispondente a (16).

Il contributo più recente [39] su questo tipo di problemi riguarda il caso in cui la legge di flusso di calore è invece del tipo $\alpha(\theta) \sim -1/\theta$. Questa situazione appare notevolmente più difficile della precedente a causa del difetto di coercività dell'equazione (16) rispetto a θ . Si è dunque potuta determinare l'esistenza dell'attrattore globale per il sistema, come anche di un attrattore esponenziale, soltanto nel caso di condizioni di Dirichlet non omogenee per θ (queste portano una qualche coercività in più) e di sorgente termica nulla ($f = 0$). La dimostrazione si basa su un procedimento di regolarizzazione "ad hoc" e sfrutta in modo essenziale la presenza di un integrale di dissipazione per il sistema (che può essere determinato grazie all'assenza di una sorgente esterna).

Un ulteriore lavoro [23] sul modello di Penrose-Fife viene descritto al successivo punto 10).

9) Modelli non isotermini di tipo Cahn - Hilliard - Gurtin: lavori [24, 26, 38]. Ricerca in collaborazione con A. Miranville (Poitiers).

Un recente tema di ricerca riguarda una classe di modelli di tipo Allen-Cahn e Cahn-Hilliard originariamente proposti nel caso isoterma da M. Gurtin tramite un nuovo approccio pienamente compatibile coi principi della Termodinamica. La prima parte di questa ricerca [24] è peraltro di carattere puramente formale (modellistico o, se si vuole, fisico-matematico) e consiste nel riprendere lo schema di Gurtin ed estenderlo (il che comporta un certo numero di difficoltà) ad una situazione esplicitamente dipendente dalla temperatura θ . In questo modo si riesce ad ottenere un'ampia classe di equazioni, le quali presentano una forte parentela sia con i modelli di tipo Frémond descritti al punto 3) sia con quelli di tipo Penrose-Fife (punto 8)), ma sono parecchio più generali e in certi casi del tutto nuove.

Noto il quadro fisico generale, in un secondo momento [26] si è svolta un'analisi rigorosa di una situazione particolarmente significativa, data dal sistema

$$(\theta^2)_t - \theta \chi \chi_t - \Delta \theta = \mu \chi_t^2, \quad (17)$$

$$\mu \chi_t - \nu \Delta \chi + W'(\chi) = -\theta \chi, \quad (18)$$

e strettamente imparentata con i modelli del punto 3). Si osservi la presenza del termine θ^2 in (17), dovuta a una particolare forma dell'energia libera del sistema. Sotto opportune ipotesi di regolarità su W , si sono dimostrate l'esistenza e l'unicità di una soluzione globale per il problema di Neumann omogeneo relativo a questo sistema, nonché la stretta positività della temperatura. Un ruolo chiave nella dimostrazione è svolto proprio dalla presenza del termine θ^2 , che consente di usare alcune stime per *soluzioni rinormalizzate* di equazioni di evoluzione con dati L^1 , al fine di controllare i "valori grandi" della temperatura in modo uniforme rispetto al tempo.

Il contributo più recente [38] su questo tipo di problemi è di nuovo di carattere modellistico-descrittivo. Si è ottenuta, tramite l'approccio di Gurtin, una nuova derivazione fisica di una vasta classe di modelli matematici che descrivono l'evoluzione di sistemi *multifase*, ove cioè coesistono più di due fasi o componenti. Anche in questo caso si è osservato che il metodo di Gurtin consente di ricavare in un quadro più generale diverse famiglie di modelli già noti in letteratura.

10) Studio dell' ω -limite di sistemi di evoluzione: lavori [23, 28, 30, 33, 34, 40]. Ricerca in collaborazione con P. Colli (Pavia), M. Grasselli (Politecnico di Milano), E. Feireisl (Praga, Accademia delle Scienze), D. Hilhorst (Orsay), F. Issard-Roch (Orsay), H. Petzeltová (Praga, Accademia delle Scienze).

Un tema di ricerca cui ci si è dedicati molto recentemente riguarda l'applicazione del cosiddetto *metodo di Simon-Łojasiewicz* per lo studio dell' ω -limite (ossia dell'insieme dei punti limite raggiunti, in un'opportuna topologia, per sottosuccessioni di $t \nearrow \infty$) delle traiettorie generate dalle soluzioni di sistemi di EDP evolutive. Per chiarire tale metodo, consideriamo per semplicità l'equazione (2). Associate opportune condizioni al bordo, è in genere non difficile mostrare che l' ω -limite contiene solo *stati stazionari*, ossia coppie $(\theta_\infty, \chi_\infty)$ che risolvono

$$-\nu \Delta \chi_\infty + W'(\chi_\infty) = \theta_\infty. \quad (19)$$

È ben noto che, in assenza di condizioni sulla geometria di Ω , se W' non è monotono un generico problema ai limiti per (19) può avere infinite soluzioni. Il metodo di

Simon-Łojasiewicz consiste essenzialmente nell'applicazione di una disuguaglianza di crescita locale valida per funzioni analitiche (inizialmente provata da Łojasiewicz nel caso finito dimensionale e successivamente estesa da Simon a spazi di Hilbert generali). Attraverso l'uso di tale disuguaglianza, o di opportune estensioni della stessa apparse nella letteratura recente, è possibile mostrare che, nell'ipotesi di analiticità di W' e assumendo altre condizioni tecniche, l' ω -limite viene a consistere di un solo punto a cui converge, per $t \nearrow \infty$, "tutta" la traiettoria.

Tale metodo è stato recentemente applicato da vari autori anche a problemi legati ai modelli di campo di fase e i risultati di questa ricerca vengono a porsi in questo filone. Entrando nei dettagli, in [23] si è analizzato il modello di Penrose-Fife, con $\alpha(\theta) = -\theta^{-1}$ (cfr. (15)) e condizioni al bordo di Dirichlet (necessariamente non omogenee) per θ . Per un tale problema si è mostrato che l' ω -limite consiste di un'unica coppia $(\theta_\infty, \chi_\infty)$, ove θ_∞ è il rilevamento armonico del valore al bordo di θ (imposto attraverso la condizione di Dirichlet ed assunto indipendente dal tempo) e χ_∞ è una soluzione della versione stazionaria di (16). La difficoltà principale nella dimostrazione è data dal carattere singolare di (15), ed in effetti un controllo uniforme in tempo delle potenze positive di θ , necessario per poter passare al limite, è stato ottenuto solo tramite un metodo di stime a priori decisamente non standard e "ad hoc".

Altri recenti contributi su questo tema riguardano il modello di campo di fase (1-2). In [28], si è studiato l' ω -limite di tale sistema nel caso di W singolare (ossia di dominio I limitato). In particolare, attraverso tecniche di regolarità e di confronto, si è compiuto uno studio dettagliato delle condizioni sui dati sotto le quali la variabile χ , almeno per tempi sufficientemente grandi, resta ben separata in norma L^∞ dagli stati puri $\chi = \pm 1$. Ciò consente di "escludere" tali singolarità (che distruggono l'analiticità di W) e dunque di applicare il metodo di Simon-Łojasiewicz.

In [30] si è poi studiato il modello di campo di fase parabolico-iperbolico (aggiunta di $\kappa \chi_{tt}$ a primo membro di (2)) e anche qui si è mostrato che, sotto opportune condizioni sui dati, l' ω -limite consiste di un unico elemento. Contrariamente al caso precedente, ci si è qui limitati a considerare funzioni W non singolari (i.e., $I = \mathbb{R}$), in quanto non pare semplice dimostrare una proprietà di separazione da eventuali barriere ± 1 in assenza di un effetto regolarizzante (il quale è invece presente nel sistema parabolico).

Con un approccio simile è stata recentemente analizzata [33] anche l'equazione di Cahn-Hilliard iperbolica con termine di viscosità:

$$\kappa \chi_{tt} + \mu \chi_t - \Delta(-\nu \Delta \chi + W'(\chi) + \eta \chi_t) = 0, \quad (20)$$

ove la stretta positività del parametro η è essenziale già per avere buona positura nel caso tridimensionale (vedi punto 12) qui sotto). Anche in questo caso, tramite il metodo di Simon-Łojasiewicz si è riusciti a provare che l' ω -limite consiste di un solo punto al quale converge l'intera traiettoria.

Infine, in [34] si è studiato un modello di campo di fase parabolico-iperbolico *nonlocale* in spazio. Ciò vale a dire che il termine di diffusione in (2) è stato sostituito dalla convoluzione rispetto alle variabili spaziali con un opportuno nucleo di integrazione:

$$\kappa \chi_{tt} + \mu \chi_t + k * \chi + W'(\chi) = \theta. \quad (21)$$

Per un tale modello, estendendo un risultato di Feireisl e Petzeltová relativo al caso parabolico ($\kappa = 0$), si è dapprima provata la buona positura, che non era ancora nota. Quindi, si è affrontato il problema del comportamento asintotico per tempi lunghi provando ancora una volta la convergenza di tutta la traiettoria ad un unico punto limite.

11) Equazioni doppiamente non lineari: lavori [32, 36]. Ricerca in collaborazione con A. Segatti (Berlino, WIAS), U. Stefanelli (Pavia, IMATI).

In due recenti lavori si è affrontata la seguente equazione doppiamente non lineare astratta:

$$\alpha(u_t) + Bu + W'(u) = f, \quad (22)$$

dove α è un grafico massimale monotono in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, B è un operatore ellittico eventualmente degenere e W è, come nei casi precedenti, un potenziale non convesso. Tale equazione compare nella descrizione di numerosi fenomeni fisici tra cui, in particolare, transizioni di fase e danneggiamento (si confronti con i problemi descritti ai punti 3) e 7)). Un contributo fondamentale allo studio di questa equazione è stato portato da Colli e Visintin nel 1990; tuttavia, in tale lavoro veniva essenzialmente trattato soltanto il caso in cui α ha crescita al più lineare, il che non è sempre vero nelle applicazioni (è da notare peraltro che le ipotesi di Colli e Visintin sono più generali sotto altri aspetti; ad esempio α può essere un qualunque operatore massimale monotono su uno spazio di Hilbert H e non deve necessariamente coincidere con un grafico in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$).

Nel lavoro [32] abbiamo dimostrato un risultato generale di esistenza e regolarità delle soluzioni valido sotto ipotesi molto generali su α , che può crescere in modo arbitrariamente veloce, e su B , che può essere degenere (ad esempio, coincidere col p -Laplaciano per $1 < p < \infty$). Inoltre, abbiamo fornito alcuni risultati parziali sul comportamento per tempi lunghi. Questi risultati sono stati completati nel successivo lavoro [34], dove, sia pure sotto ipotesi più restrittive su B (le quali in particolare escludono il caso degenere), abbiamo dimostrato ulteriori proprietà di regolarizzazione parabolica della soluzione, e studiato l'attrattore globale per il sistema dinamico associato, caratterizzandolo dal punto di vista della regolarità. Infine, anche per questo problema si è riusciti a studiare l' ω -limite attraverso il metodo di Simon-Łojasiewicz sotto condizioni molto generali sui dati.

12) Generalizzazioni dell'equazione di Cahn-Hilliard: buona positura e comportamento asintotico: lavori [35, 41, 42]. Ricerca in collaborazione con M. Grasselli (Politecnico di Milano), A. Segatti (Berlino, WIAS), S. Zelik (Surrey).

Nell'articolo [35] si è studiata la seguente versione dell'equazione di Cahn-Hilliard:

$$\mu\chi_t - \operatorname{div} (m(\chi)\nabla(-\nu\Delta\chi + W'(\chi))) = 0, \quad (23)$$

caratterizzata dalla presenza di un coefficiente di mobilità dipendente dalla soluzione (in modo regolare e non degenere). La buona positura del relativo problema di Neumann omogeneo è stata dimostrata da Barrett e Blowey in una e due dimensioni di spazio; nel caso tridimensionale è nota la sola esistenza di una soluzione debole, ma non

si hanno, né paiono facili da dimostrare, risultati di unicità. Il risultato ottenuto in [35] riguarda il comportamento per tempi lunghi del sistema e, in particolare, l'esistenza dell'attrattore globale. Dal momento che si è voluto trattare anche il caso tridimensionale, è stato necessario utilizzare una teoria adatta allo studio dei problemi privi di unicità e si è pertanto ricorsi a un'opportuna estensione del metodo dei *semiflussi generalizzati* dovuto a J.M. Ball. Per utilizzare tale strumento si è dovuta considerare soltanto un'opportuna sottoclasse della famiglia delle soluzioni, le cui proprietà sono state esaminate e discusse in dettaglio nel corso del lavoro.

L'equazione di Cahn-Hilliard iperbolica (*non viscosa*, si confronti con (20)) compare nella modellizzazione delle transizioni di fase di certi materiali vetrosi ed ha l'espressione

$$\kappa \chi_{tt} + \mu \chi_t - \Delta(-\nu \Delta \chi + W'(\chi)) = 0, \quad (24)$$

ove $\kappa > 0$. La buona positura del problema di Dirichlet per (24) è stata recentemente provata in due recenti lavori di Zheng e Milani (ove ne viene anche discusso il comportamento asintotico per tempi lunghi), ma solo in una dimensione spaziale. In più dimensioni, l'esistenza della soluzione resta facile da dimostrare, almeno per un'ampia classe di potenziali *non singolari*; tuttavia, i problemi dell'unicità e del comportamento asintotico appaiono molto più complessi.

Nel lavoro [41] abbiamo considerato il caso bidimensionale, per il quale abbiamo provato la buona positura per potenziali regolari di crescita controllata. Inoltre, abbiamo discusso in dettaglio le proprietà della soluzione in varie classi di regolarità, studiandone in particolare il comportamento per tempi lunghi e determinando, sotto opportune condizioni, l'esistenza dell'attrattore globale e di un attrattore esponenziale per la famiglia delle traiettorie. Tali risultati non sembrano poter essere estesi nella stessa forma al caso tridimensionale; tuttavia, nel lavoro [42] abbiamo ottenuto un risultato più debole che richiede una condizione di compatibilità tra il valore di κ e la grandezza dei dati iniziali in una certa norma. In altre parole, si è visto che, se κ è sufficientemente piccolo (ovvero l'evoluzione è vicina a quella del problema parabolico), allora l'unicità della soluzione e l'esistenza dell'attrattore riescono ad aversi anche in tre dimensioni almeno per dati iniziali "non troppo grandi". I risultati di [42] sono basati su un opportuno adattamento di una tecnica originariamente utilizzata da Zelik per l'equazione delle onde smorzate con potenziale W di crescita sopracritica.

13) Equazioni di evoluzione con condizioni al bordo di tipo dinamico: lavoro [37]. Ricerca in collaborazione con G. Gilardi (Pavia), A. Miranville (Poitiers).

Nel recente lavoro [37] si è affrontata un'equazione di tipo Cahn-Hilliard (della forma (24), ma con $\kappa = 0$, ossia il caso parabolico), nella quale le condizioni al bordo sono state assunte di tipo dinamico. Ciò significa che sulla frontiera Γ di Ω si è supposta valere la relazione

$$\mu_\Gamma \chi_t - \nu_\Gamma \Delta_\Gamma \chi + W'_\Gamma(\chi) = -\nu \partial_n \chi, \quad (25)$$

ove $\mu_\Gamma, \nu_\Gamma > 0$, Δ_Γ è l'operatore di Laplace-Beltrami e W_Γ è un opportuno potenziale che può differire da W . Tali condizioni sono molto studiate nella letteratura recente perché appaiono essere molto aderenti alla realtà fisica. Finora questa equazione era stata analizzata solo nel caso di potenziali W e W_Γ regolari, ovvero definiti su tutta

la retta reale. Il nostro contributo in [37] è essenzialmente consistito nello studiare il problema cercando di considerare la classe più ampia possibile di potenziali singolari W e W_F . In particolare, si è mostrata la buona positura del sistema sotto ipotesi di crescita e compatibilità molto deboli tra W e W_F . In una ricerca ancora in corso, svolta in collaborazione con gli stessi coautori, stiamo ora studiando il comportamento asintotico di questa equazione dal punto di vista dell'attrattore globale.

III. Elenco delle pubblicazioni

Lavori pubblicati (o in corso di stampa – in ogni caso accettati per la pubblicazione) su riviste scientifiche:

1. G. Schimperna, *Weak solution to a phase-field transmission problem in a concentrated capacity*, Math. Methods Appl. Sci., **22** (1999), 1235–1254.
2. G. Schimperna, *Some convergence results for a class of nonlinear phase-field evolution equations*, J. Math. Anal. Appl., **250** (2000), 406–434.
3. G. Schimperna, *Singular limit of a transmission problem for the parabolic phase-field model*, Appl. Math., **45** (2000), 217–238.
4. G. Schimperna, *Abstract approach to evolution equations of phase-field type and applications*, J. Differential Equations, **164** (2000), 395–430.
5. F. Luterotti, G. Schimperna, U. Stefanelli, *Existence result for a nonlinear model related to irreversible phase changes*, M³AS – Math. Models Methods Appl. Sci., **11** (2001), 808–825.
6. P. Colli, G. Gilardi, M. Grasselli, G. Schimperna, *The conserved phase-field system with memory*, Adv. Math. Sci. Appl., **11** (2001), 265–291.
7. P. Colli, G. Gilardi, M. Grasselli, G. Schimperna, *Global existence for the conserved phase field model with memory and quadratic nonlinearity*, Portugal. Math., **58** (2001), 159–170.
8. P. Colli, F. Luterotti, G. Schimperna, U. Stefanelli, *Global existence for a class of generalized systems for irreversible phase changes*, NoDEA – Nonlinear Differential Equations Appl., **9** (2002), 255–276.
9. F. Luterotti, G. Schimperna, U. Stefanelli, *Global solution to a phase field model with irreversible and constrained phase evolution*, Quart. Appl. Math., **60** (2002), 301–316.
10. E. Bonetti, P. Colli, W. Dreyer, G. Gilardi, G. Schimperna, J. Sprekels, *On a model for phase separation in binary alloys driven by mechanical effects*, Phys. D, **165** (2002), 48–65.
11. Ph. Laurençot, G. Schimperna, U. Stefanelli, *Global existence of a strong solution to the one-dimensional full model for irreversible phase transitions*, J. Math. Anal. Appl., **271** (2002), 426–442.
12. G. Savaré, G. Schimperna, *Domain perturbations and estimates for the solutions of second order elliptic equations*, J. Math. Pures Appl., **81** (2002), 1071–1112.
13. E. Bonetti, W. Dreyer, G. Schimperna, *Global solution to a generalized Cahn-Hilliard equation with viscosity*, Adv. Differential Equations, **8** (2003), 231–256.

14. E. Rocca, G. Schimperna, *The conserved Penrose-Fife system with Fourier heat flux law*, Nonlinear Anal., **53** (2003), 1089–1100.
15. F. Luterotti, G. Schimperna, U. Stefanelli, *A generalized phase relaxation model with hysteresis*, Nonlinear Anal., **55** (2003), 381–398.
16. E. Rocca, G. Schimperna, *Singular limit of a conserved Penrose-Fife model with special heat flux law and memory effects*, Asymptot. Anal., **36** (2003), 285–301.
17. D. Kessler, J.-F. Scheid, G. Schimperna, U. Stefanelli, *Study of a system for the isothermal separation of components in a binary alloy with change of phase*, IMA J. Appl. Math., **69** (2004), 233–257.
18. E. Bonetti, G. Schimperna, *Local existence for Frémond's model of damage in elastic materials*, Contin. Mech. Thermodyn., **16** (2004), 319–335.
19. P. Colli, G. Gilardi, E. Rocca, G. Schimperna, *On a Penrose-Fife phase-field model with non-homogeneous Neumann boundary conditions for the temperature*, Differential Integral Equations, **17** (2004), 511–534.
20. E. Rocca, G. Schimperna, *Universal attractor for a Penrose-Fife system with special heat flux law*, Mediterr. J. Math., **1** (2004), 109–121.
21. G. Schimperna, U. Stefanelli, *A quasi-stationary phase field model with micro-movements*, Appl. Math. Optim., **50** (2004), 67–86.
22. E. Rocca, G. Schimperna, *Universal attractor for some singular phase transition systems*, Phys. D, **192** (2004), 279–307.
23. E. Feireisl, G. Schimperna, *Large time behaviour of solutions to Penrose-Fife phase change models*, Math. Methods Appl. Sci., **28** (2005), 2117–2132.
24. A. Miranville, G. Schimperna, *Nonisothermal phase separation based on a microforce balance*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **5** (2005), 753–768.
25. E. Bonetti, G. Schimperna, A. Segatti, *On a doubly nonlinear model for the evolution of damaging in viscoelastic materials*, J. Differential Equations, **218** (2005), 91–116.
26. A. Miranville, G. Schimperna, *Global solution to a phase transition model based on a microforce balance*, J. Evol. Equ., **5** (2005), 253–276.
27. A. Lorenzi, E. Rocca, G. Schimperna, *Direct and inverse problems for a parabolic integro-differential system of Caginalp type*, Adv. Math. Sci. Appl., **15** (2005), 227–263.
28. M. Grasselli, H. Petzeltová, G. Schimperna, *Long time behavior of solutions to the Caginalp system with singular potential*, Z. Anal. Anwend., **25** (2006), 51–72.
29. E. Rocca, G. Schimperna, *Global attractor for a parabolic-hyperbolic Penrose-Fife phase field system*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **15** (2006), 1193–1214.

- 30. M. Grasselli, H. Petzeltová, G. Schimperna, *Convergence to stationary solutions for a parabolic-hyperbolic phase-field system*, Commun. Pure Appl. Anal., **5** (2006), 827–838.
- 31. G. Schimperna, U. Stefanelli, *Positivity of the temperature for phase transitions with micro-movements*, Nonlinear Anal. Real World Appl., **8** (2007), 257–266.
- 32. G. Schimperna, A. Segatti, U. Stefanelli, *Well-posedness and long-time behavior for a class of doubly nonlinear equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **18** (2007), 15–38.
- 33. M. Grasselli, H. Petzeltová, G. Schimperna, *Asymptotic behavior of a nonisothermal viscous Cahn-Hilliard equation with inertial term*, J. Differential Equations, **239** (2007), 38–60.
- 34. M. Grasselli, H. Petzeltová, G. Schimperna, *A nonlocal phase-field system with inertial term*, Quart. Appl. Math., **65** (2007), 451–469.
- 35. G. Schimperna, *Global attractors for Cahn-Hilliard equations with nonconstant mobility*, Nonlinearity **20** (2007), 2365–2387.
- 36. G. Schimperna, A. Segatti, *Attractors for the semiflow associated with a class of doubly nonlinear parabolic equations*, Asymptot. Anal., **56** (2008), 61–86.
- 37. G. Gilardi, A. Miranville, G. Schimperna, *On the Cahn-Hilliard equation with irregular potentials and dynamic boundary conditions*, Comm. Pure Appl. Anal., in corso di stampa.
- 38. A. Miranville, G. Schimperna, *Generalized Cahn-Hilliard equations for multicomponent alloys*, Adv. Math. Sci. Appl., in corso di stampa.
- 39. G. Schimperna, *Global and exponential attractors for the Penrose-Fife system*, M³AS – Math. Models Methods Appl. Sci., in corso di stampa.
- 40. P. Colli, D. Hilhorst, F. Issard-Roch, G. Schimperna, *Long time convergence for a class of variational phase field models*, Discrete Contin. Dyn. Syst., in corso di stampa.

Preprint – lavori sottoposti per la pubblicazione:

- 41. M. Grasselli, G. Schimperna, S. Zelik, *On the 2D Cahn-Hilliard equation with inertial term*, sottoposto per la pubblicazione.
- 42. M. Grasselli, G. Schimperna, A. Segatti, S. Zelik, *On the 3D Cahn-Hilliard equation with inertial term*, sottoposto per la pubblicazione.

Lavori pubblicati in “Conference proceedings” (con “referee”):

43. G. Schimperna, *Convergence of phase-field equations to the Stefan model*, Proceedings of the PCC99 ESF-AMIF Workshop (Warsaw, Poland, 24-27/6/1999), T. A. Kowalewski, F. Stella, J. Banaszek, J. Szmyd editors, IPPT-PAN Reports, **5** (1999), 131–134.
44. J.-F. Scheid, G. Schimperna, *Regularity and uniqueness results for a phase change problem in binary alloys*, Proceedings of the “Fourth European Conference on Elliptic and Parabolic Problems - Rolduc and Gaeta 2001”, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2002, 475–484.
45. F. Luterotti, G. Schimperna, U. Stefanelli, *Local solution to Fremond’s full model for irreversible phase transitions*, Proc. “Modelli Matematici e Problemi Analitici per Materiali Speciali”, Cortona, 25-29 giugno 2001, “Mathematical Models and Methods for Smart Materials”, M. Fabrizio, B. Lazzari & A. Morro (eds.), Ser. Adv. Math. Appl. Sci. 62, World Scientific Publishing Co. 2002, 323–328.
46. F. Luterotti, G. Schimperna, U. Stefanelli, *Existence results for a phase transition model based on microscopic movements*, Differential equations: inverse and direct problems, 245–263, Lect. Notes Pure Appl. Math., 251, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.

Tesi di dottorato:

47. G. Schimperna, *Transmission Problems for Nonlinear Parabolic Systems of Phase-field Type*, PhD. Thesis, University of Pavia, 2000.

IV. Attività didattica

Nel seguito si riporta la descrizione dell'attività didattica, suddivisa per anni accademici ed elencata in ordine cronologico inverso. Salvo quando diversamente indicato, si deve intendere che i corsi sono stati svolti in qualità di docente titolare. Tutta l'attività didattica elencata è stata tenuta presso l'Università degli Studi di Pavia.

Anno accademico 2008/09 (prevista):

- “INTRODUZIONE AI PROBLEMI PER EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI” (in collaborazione con Aldo Pratelli), Corso di Laurea in Matematica.
- “COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DI BASE”, Corso di Laurea in Fisica.
- “ISTITUZIONI DI MATEMATICHE”, Corso di Laurea in Scienze Biologiche.

Anno accademico 2007/08:

- “INTRODUZIONE AI PROBLEMI PER EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI”, Corso di Laurea in Matematica.
- “ANALISI MATEMATICA D” (in collaborazione con Cristiana Bondioli), Corso di Laurea in Matematica.
- “ISTITUZIONI DI MATEMATICHE”, Corso di Laurea in Scienze Biologiche.

Anno accademico 2006/07:

- “EQUAZIONI DIFFERENZIALI E SISTEMI DINAMICI”, Corsi di Laurea in Matematica e in Fisica.
- “ISTITUZIONI DI MATEMATICHE”, Corso di Laurea in Scienze Biologiche.

Anno accademico 2005/06:

- “EQUAZIONI DIFFERENZIALI E SISTEMI DINAMICI” Corsi di Laurea in Matematica e in Fisica.
- “ISTITUZIONI DI MATEMATICHE”, Corso di Laurea in Scienze Biologiche.

Anno accademico 2004/05:

- “EQUAZIONI DIFFERENZIALI E SISTEMI DINAMICI” (in collaborazione con Pierluigi Colli), Corsi di Laurea in Matematica e in Fisica.
- “ISTITUZIONI DI MATEMATICHE”, Corso di Laurea in Scienze Biologiche.

Anno accademico 2003/04:

- Esercitazioni di “CONCETTI DI ANALISI MATEMATICA DI BASE”, Corsi di Laurea in Matematica e in Fisica.
- “EQUAZIONI DIFFERENZIALI E SISTEMI DINAMICI”, Corso di Laurea in Fisica.
- “COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DI BASE” (in collaborazione con

Daniele Boffi), Corso di Laurea in Fisica.

Anno accademico 2002/03:

- “EQUAZIONI DIFFERENZIALI E SISTEMI DINAMICI” (in collaborazione con Alessandro Torelli), Corso di Laurea in Matematica.
- “EQUAZIONI DIFFERENZIALI E SISTEMI DINAMICI”, Corso di Laurea in Fisica; N.B.: è un corso distinto dal precedente.
- “COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DI BASE” (in collaborazione con Daniele Boffi), Corso di Laurea in Fisica.

Anno accademico 2001/02:

- “STRUMENTI INFORMATICI E MATEMATICI DI BASE”, modulo di “MATEMATICA”, Corso di Laurea in Matematica.
- “EQUAZIONI DIFFERENZIALI E SISTEMI DINAMICI”, Corso di Laurea in Fisica.

Anno accademico 2000/01:

- “TEORIA DELLE FUNZIONI”, II modulo (in collaborazione con Gianni Gilardi), Corso di Laurea in Matematica.
- Esami di “ANALISI MATEMATICA II”, Corso di Laurea in Fisica.
- Esercitazioni di “ANALISI MATEMATICA A”, Facoltà di Ingegneria.
- Corso Integrato di “MATEMATICA, FISICA E STATISTICA”, modulo di “MATEMATICA”, Corso di Laurea in Scienze Motorie.

Anno accademico 1999/2000:

- Esercitazioni di “ANALISI MATEMATICA 1”, Facoltà di Ingegneria.
- Corso Integrato di “MATEMATICA, FISICA E STATISTICA”, modulo di “MATEMATICA”, Corso di Laurea in Scienze Motorie (docenza a contratto).

Anno accademico 1998/99:

- Esercitazioni di “ANALISI MATEMATICA 1”, Facoltà di Ingegneria.