

Curriculum dell'attività scientifica e didattica

Giulio Fernando Schimperna

Dipartimento di Matematica, Università di Pavia

Via Ferrata, 1 – 27100 Pavia

15 luglio 2005

I. INFORMAZIONI GENERALI	2
II. ATTIVITÀ DI RICERCA	7
III. PUBBLICAZIONI	19
IV. ATTIVITÀ DIDATTICA	22

I. Informazioni generali

Dati personali:

Data e luogo di nascita: 18 luglio 1972, Milano

Stato civile: coniugato, tre figlie

Indirizzo: via Bona di Savoia n. 47, 27100 - Pavia

Telefono: 0382/576761 (casa), 0382/985654 (ufficio)

Fax: 0382/985602

E-mail: giusch04@unipv.it

Pagina web: <http://www-dimat.unipv.it/~giulio/>

Posizione attuale:

- Ricercatore, settore MAT/05 - Analisi Matematica; Facoltà di Scienze MM. FF. NN., Università di Pavia (da febbraio 2001; confermato nel ruolo da febbraio 2004).

Posizioni precedenti:

- Studente di Dottorato in Matematica; Università di Milano (da novembre 1995 a ottobre 1999).
- Titolare di assegno di ricerca; Dipartimento di Matematica, Università di Pavia (da gennaio 2000 a gennaio 2001).

Studi superiori ed universitari:

- Liceo Classico Statale G. Carducci (Milano) (dal 1985 al 1990).
- Maturità Classica con votazione di 60/60 (luglio 1990).
- Alunno del Collegio Ghislieri di Pavia (dal 1990 al 1995).
- Corso di Laurea in Matematica presso l'Università di Pavia (dal 1990 al 1995).
- Laurea in Matematica con votazione di 110 e lode (17 gennaio 1995).
- Tesi di Laurea: "STUDIO DI UN PROBLEMA DI FRONTIERA LIBERA DI TIPO VORTICE IN SPAZI DI FUNZIONI ANALITICHE". Relatore: prof. Alessandro Torelli.
- Corso di Dottorato in Matematica presso l'Università di Milano (XI ciclo) (dal 1995 al 1999).
- Dottore di Ricerca in Matematica (18 gennaio 2000).
- Tesi di Dottorato: "TRANSMISSION PROBLEMS FOR NONLINEAR PARABOLIC SYSTEMS OF PHASE-FIELD TYPE". Relatore: prof. Gianni Gilardi (univ. di Pavia).

Altre esperienze:

- Corso di Orientamento Preuniversitario organizzato a Cortona dalla Scuola Normale Superiore di Pisa (settembre 1989).
- Servizio Civile presso la Fondazione "Il Melo" di Gallarate (dal 20 giugno 1995 al

19 giugno 1996).

Borse di studio, riconoscimenti e premi:

- Vincitore della borsa di studio CNR n. 209.01.60 per laureandi in matematica (ma costretto a rinunciare per ragioni tecniche).
- Vincitore del premio di studio “Vittorio Emanuele Galafassi” (locale) per la miglior tesi di laurea in matematica discussa presso l’Università di Pavia nel biennio solare 1994-1995.

Conferenze su invito a workshops o congressi:

- Workshop internazionale “Multiscale Problems and Phase Transitions” (WIAS - Berlino, 29-31/8/2001): “EXISTENCE AND ASYMPTOTIC RESULTS FOR SOME NON-LINEAR CAHN-HILLIARD-LIKE EQUATIONS”.
- Incontro nazionale: “Recenti Sviluppi nella Teoria delle Equazioni Differenziali” (Bologna, 19-20/4/2002): “PROBLEMI DI STEFAN RILASSATI PER LA TEMPERATURA ASSOLUTA”.
- Assemblea scientifica G.N.F.M. (Montecatini Terme, 17-19/2/2003): “UN MODELLO DI DANNEGGIAMENTO PER MATERIALI ELASTICI”.
- PV-MI 2003, Seconda Giornata di Studio Università di Pavia - Politecnico di Milano “Equazioni Differenziali e Calcolo delle Variazioni” (Milano, 11/12/2003): “ATTRATTORE UNIVERSALE PER MODELLI DI PENROSE-FIFE PARABOLICI E PARABOLICI-IPERBOLICI”.
- Workshop internazionale “Evolution equations: Inverse and Direct Problems” (Cortona, 21-25/6/2004): “DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR CONSERVED PHASE FIELD SYSTEMS WITH MEMORY”.
- Workshop internazionale “Inverse and Direct Problems” (Cortona, 20-24/6/2005): “SOME RESULTS ON DOUBLY NONLINEAR PARABOLIC PROBLEMS”.
- (*in programma*) Workshop internazionale “Dynamics of Phase Transitions” (Berlino, 30/11-3/12/2005).
- (*in programma*) Workshop internazionale “AIMS’ Sixth International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications” (Poitiers, 25-28/6/2006).

Comunicazioni a workshops o congressi:

- Workshop internazionale “Phase Change with Convection: Modelling and Validation” (Varsavia, 24-26/6/1999): “CONVERGENCE OF PHASE-FIELD EQUATIONS TO THE STEFAN MODEL”.
- XVI Congresso UMI (Napoli, 13-18/9/1999): “UN PROBLEMA DI PHASE-FIELD CONSERVATO CON MEMORIA”.
- Workshop internazionale “Phase Transitions and Interfaces in Evolution Equations” (S.ta Margherita Ligure, 14-18/2/2000): “SOME RESULTS ON IRREVERSIBLE PHASE CHANGE MODELS”.

- Giornate di studio su “Equazioni Integrodifferenziali alle Derivate Parziali e Applicazioni” (Salò, 23-24/6/2000): “ALCUNI RISULTATI SUL MODELLO DI PHASE FIELD CONSERVATO CON MEMORIA”.
- Workshop nazionale “Simmetrie, Forme Geometriche, Evoluzione, e Memoria nelle Equazioni alle Derivate Parziali” (Taormina, 7-10/2/2001): “MODELLI DI CAMPO DI FASE CONSERVATIVI CON MEMORIA”.
- Workshop nazionale “Problemi a Frontiera Libera” (Montecatini, 14-15/6/2001): “ANALISI DI UN MODELLO DI SEPARAZIONE DI FASE IN LEGHE BINARIE”.
- Workshop nazionale “Modelli Matematici e Problemi Analitici per Materiali Speciali” (Cortona, 25-29/6/2001): “TRANSIZIONI DI FASE IRREVERSIBILI: MODELLIZZAZIONE E RISULTATI MATEMATICI”.
- Workshop internazionale “Fourth European Conference on Elliptic and Parabolic Problems - Theory and Applications” (Gaeta, 24-28/9/2001): “A PHASE CHANGE SYSTEM IN BINARY ALLOYS”.
- Workshop internazionale “Free Boundary Problems: Theory and Applications” (Trento, 5-8/6/2002): “LOCAL SOLUTION TO FRÉMOND’S MODEL FOR DAMAGE IN ELASTIC MATERIALS” (poster session).
- Incontro nazionale “Modelli Matematici e Problemi Analitici per Materiali Speciali” (Salò, 4-6/7/2002): “LIMITI SINGOLARI DI UN MODELLO DI PENROSE-FIFE CON MEMORIA”.
- Workshop nazionale “Free Boundary Problems in the Applied Sciences” (Montecatini Terme, 10-11/4/2003): “CONTINUOUS DEPENDENCE AND ASYMPTOTIC ANALYSIS FOR SOME SYSTEMS OF PENROSE-FIFE TYPE”.
- Incontro nazionale “Materiali Speciali e Memorie: Problemi Modellistici e Analitici” (Salò, 3-5/7/2003): “ALCUNI RISULTATI SULL’EQUAZIONE DI CAHN-HILLIARD CON MOBILITÀ NON COSTANTE”.
- XVII Congresso UMI (Milano, 8-13/9/2003): “ESISTENZA DELL’ATTRATTORE UNIVERSALE PER ALCUNI MODELLI DI PENROSE-FIFE”.
- Congresso internazionale “FBP 2004 – Free Boundary Problems in Biomathematics, Multiscaling, Infinite-Dimensional Dynamical Systems” (Montecatini, 10-12/6/2004): “NONISOTHERMAL PHASE SEPARATION MODELS BASED ON A MICROFORCE BALANCE”.
- “EVEQ 2004 – Sixth International Summer School on Evolution Equations (Praga, 12-16/7/2004): “SOME RESULTS ON PDE’S SYSTEMS FOR DAMAGING PHENOMENA”.
- Workshop internazionale “Dissipative models in phase transitions” (Cortona, 5-11/9/2004): “LONG TIME BEHAVIOR OF CAGINALP’S MODEL WITH SINGULAR POTENTIAL”.

Partecipazioni a workshops, congressi, scuole estive:

- Corso SMI di “Analisi non Lineare”, docenti A. Ambrosetti ed I. Ekeland (Cortona, luglio 1997).

- Workshop internazionale “Phase-field Models and Surface Effects” (Cortona, 14-18/9/1998).
- Scuola estiva “III International Summer School on the Calculus of Variations” (Pisa, 28/9-3/10/1998).
- Workshop internazionale “Phase Transitions and Dissipation Phenomena” (Milano, 6-10/9/1999).
- Scuola estiva “MAEI 2000 - Mathematical Aspects of Evolving Interfaces” (Funchal (Portogallo), 3-9/7/2000).
- Workshop nazionale “IPERBS 2000 - VIII Incontro Nazionale sui Problemi di Tipo Iperbolico” (Brescia, 30/11-2/12/2000).
- Congresso internazionale “Nonlinear Evolution Problems” (Roma, 28-31/1/2003).
- Second annual meeting of the HYKE network “Around HYperbolic and Kinetic Equations 2 – A-HYKE-2” (Parigi, 14-17/4/2004).

Conferenze tenute presso università o istituti di ricerca:

- Dipartimento di Matematica, Università di Trento (3/4/2000): “ALCUNI MODELLI DI TRANSIZIONE DI FASE”.
- IMATI-CNR, Pavia (7/12/2000): “MODELLI DI SEPARAZIONE DI FASE IN SOLIDI SOGGETTI A FORZE TERMOELASTICHE”.
- Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Berlino (13/12/2000): “SOME RESULTS ON PHASE SEPARATION MODELS WITH THERMOELASTIC EFFECTS”.
- Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the Czech Republic, Praga (9/3/2004): “GLOBAL ATTRACTORS FOR SINGULAR PHASE CHANGE SYSTEMS OF PENROSE - FIFE TYPE”.

Soggiorni presso università o istituti di ricerca all'estero:

- Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Berlino (11-17/12/2000).
- Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the Czech Republic, Praga (1/3-31/5/2004 e 18-24/7/2005).

Organizzazione di workshops o congressi:

- Workshop internazionale “Evolution Problems – in memory of Brunello Terreni” (Rapallo, 26-27/3/2004): membro del comitato organizzatore.
- Workshop internazionale “Direct and Inverse Problems in Evolution Equations” (Rimini, 17-19/3/2005): membro del comitato organizzatore.

Attività di referee per le seguenti riviste:

- Journal of Integral Equations and Applications
- Mathematical Methods in the Applied Sciences
- SIAM Journal on Mathematical Analysis

- Mathematical Models and Methods in Applied Sciences
- Discrete and Continuous Dynamical Systems

II. Attività di ricerca

L'attività di ricerca svolta in questi anni è stata in gran parte dedicata allo studio di sistemi di equazioni a derivate parziali provenienti dalle scienze applicate e in prevalenza legati alla modellizzazione di fenomeni di transizione di fase. In tale ambito, come si può osservare dalla descrizione dettagliata riportata nel seguito, si sono affrontati problemi di diffusione termica (anche con effetti di memoria), di transizione di fase unidirezionale, di separazione delle componenti di leghe metalliche, di danneggiamento di materiali. I relativi modelli matematici, molto diversi tra loro dal punto di vista strutturale, sono peraltro tutti caratterizzati dalla diffusione di uno o più "parametri d'ordine", ossia variabili adimensionali che caratterizzano la proporzione tra due o più stati fisici. In molti casi ci si è riferiti a varianti o generalizzazioni del seguente sistema di equazioni a derivate parziali, detto "sistema di campo di fase" (o di "*phase field*"):

$$\theta_t + \chi_t - \Delta\theta = f, \quad (1)$$

$$\mu\chi_t - \nu\Delta\chi + \beta(\chi) + \sigma'(\chi) = \theta, \quad (2)$$

ove un'incognita è, appunto, il parametro d'ordine χ e l'altra è la temperatura θ , nell'ipotesi che il processo, come accade di solito nei casi concreti, sia non isoterma. La prima equazione (1) descrive il bilancio di energia, e pertanto fisicamente f rappresenta una sorgente esterna di calore; la (2), detta a volte "equazione cinetica", fornisce invece la dinamica del cambiamento di fase. In (2), $\mu, \nu > 0$ sono parametri di rilassamento, β è un termine monotono di vincolo (che in genere forza χ ad assumere solo valori compresi tra le barriere $\chi = \pm 1$ corrispondenti agli stati puri) e σ' è una funzione Lipschitz. La somma $\beta + \sigma'$ costituisce la derivata del potenziale (di solito non convesso) associato al processo di cambiamento di fase.

Riguardo al sistema (1-2), o alle sue varianti, i problemi studiati sono stati di diverse tipologie: esistenza (locale o in grande) delle soluzioni, unicità, dipendenza continua dai dati, regolarità e comportamento qualitativo, studio di limiti singolari, analisi per tempi lunghi e determinazione di attrattori. Le tecniche e l'approccio utilizzati sono in genere di tipo variazionale: molto spesso si è partiti da stime di tipo energia legate alla derivazione fisica del modello in esame; quindi i risultati sono stati solitamente ottenuti attraverso la dimostrazione di stime di regolarità e l'uso di metodi di monotonia e compattezza. In molti casi, peraltro, la difficoltà intrinseca del problema ha richiesto lo sviluppo di tecniche *ad hoc*.

Un secondo e differente tema di ricerca (vedi punto 4) nel seguito) ha riguardato lo studio di problemi di perturbazione del dominio per equazioni ellittiche, sempre ambientate in un quadro variazionale, e si sta attualmente affrontando il problema dell'applicazione dei risultati ottenuti a sistemi parabolici in domini non cilindrici.

Nel seguito si riporta una descrizione dettagliata dei vari temi di ricerca affrontati. Le pubblicazioni cui si fa riferimento sono numerate come nel successivo elenco dato al punto III.

1) Problemi di trasmissione e limiti singolari per il modello di phase field (lavori [1], [2], [3], [4], [32], [D]).

Nella tesi di dottorato [D] sono stati studiati alcuni problemi analitici collegati al modello di campo di fase (1–2). Tale modello ha grande importanza per le applicazioni dato che è in grado di descrivere matematicamente diverse caratteristiche fisiche proprie di alcune sostanze, quali la tensione superficiale o la possibilità di conservare, in situazioni particolari, lo stato liquido al di sotto della temperatura di congelamento (“supercooling”); inoltre esso permette l’insorgere di interfacce tra le fasi di spessore non nullo (“mushy regions”).

Nell’ambito dei modelli di campo di fase, su cui la letteratura recente è piuttosto copiosa, si è affrontato uno specifico problema, relativo alla trasmissione del calore tra due diverse sostanze poste in due domini adiacenti Ω_1 e Ω_2 . In effetti, la presenza di due materiali con differenti caratteristiche fisiche aggiunge alla difficoltà intrinseca del modello un “salto” dei coefficienti (ad esempio μ , ν , ma anche la funzione β) in corrispondenza della superficie di contatto. L’approccio matematico con cui si è affrontato questo problema si basa su una formulazione variazionale astratta del sistema (1–2), abbastanza generale da ammettere la discontinuità dei coefficienti.

Grazie ad un tale metodo, sono stati dimostrati vari teoremi di esistenza, unicità e regolarità della soluzione [4], tramite l’utilizzo di tecniche di discretizzazione in tempo - stime a priori - compattezza. L’analisi del problema di trasmissione [4] segue poi come conseguenza dei risultati astratti una volta che si siano precisate ed analizzate opportune condizioni di compatibilità tra i parametri relativi ai due diversi materiali. La principale difficoltà è costituita dalla trattazione del termine di vincolo β , che può in generale essere multivoco (un caso modello è dato da $\beta = \partial I_{[-1,1]}$, sottodifferenziale dell’*indicatrice* di $[-1, 1]$), ed in effetti il “salto” di β sulla superficie di contatto richiede di lavorare su una formulazione molto rilassata.

Un’ulteriore applicazione dei risultati di [4] riguarda un problema di “capacità concentrata” [1], dove si immagina che una delle due sostanze (ad esempio quella situata in Ω_2) occupi uno strato sottile adiacente al dominio Ω_1 dove è posto l’altro materiale e presenti valori di conducibilità molto grandi. La terminologia “capacità concentrata” sta in effetti a indicare che lo spessore dello strato viene direttamente supposto nullo nell’analisi e dunque si immagina che Ω_2 degeneri in una regione $\Gamma_2 \subset \partial\Omega_1$. Ne risulta quindi un accoppiamento tra un sistema parabolico su un dominio materiale ed un altro sistema, anch’esso parabolico, su una parte del bordo di questo. In queste condizioni, la difficoltà aggiuntiva è dovuta all’impossibilità di impostare i due sistemi nel medesimo quadro funzionale, a causa della perdita di regolarità associata all’operatore di traccia che compare nella formulazione delle equazioni sul bordo. Risulta dunque utile la nozione di soluzione “rilassata” data nell’approccio astratto, che consente di mostrare l’esistenza della soluzione per il problema di trasmissione sotto le condizioni più generali su β (che in particolare può essere discontinuo sulla regione di contatto). Sotto ipotesi più restrittive (ma fisicamente motivate) su β , si è inoltre mostrato che la soluzione può essere intesa in senso più forte.

In una seconda parte della tesi, si sono studiati alcuni limiti singolari del problema di trasmissione ottenuti qualora si facciano variare e tendere a zero certi parametri fisici relativi ad una sola delle due sostanze in contatto (ad esempio quella in Ω_2). In particolare, si sono ottenuti risultati di convergenza delle soluzioni nei casi in cui il sistema limite si riferisce ad un problema di trasmissione tra il modello di phase field

nel materiale non perturbato e, rispettivamente:

- a) il modello di “phase relaxation” ($\nu \searrow 0$ in Ω_2),
- b) il modello di Stefan con energia di interfaccia [3] ($\mu \searrow 0$ in Ω_2),
- c) il modello di Stefan classico [2, 32] ($\mu, \nu \searrow 0$ e $\sigma' \rightarrow 0$ in Ω_2).

In queste analisi vengono ulteriormente enfatizzate le difficoltà legate alla discontinuità dei coefficienti sulla superficie di separazione tra le due sostanze. Dunque, per dimostrare i suaccennati risultati di convergenza è stato talora necessario utilizzare tecniche ad hoc che consentissero di controllare il carattere degenerare dell’equazione limite in Ω_2 . In particolare, nell’analisi del problema in [2, 32] si sono sviluppati alcuni opportuni strumenti di tipo Gamma-convergenza. Infatti, le usuali tecniche di stime a priori - compattezza non parevano in grado, da sole, di garantire la possibilità di passare al limite.

2) Modelli di phase field con memoria (lavori [7], [8], [25]; ricerca in collaborazione con P. Colli - Pavia, G. Gilardi - Pavia, M. Grasselli - Politecnico di Milano, A. Lorenzi - Milano, E. Rocca - Milano).

Sempre nell’ambito dei modelli di campo di fase, si sono affrontati alcuni problemi relativi al comportamento di sostanze in cui la trasmissione del calore è regolata da equazioni costitutive diverse dalla legge di Fourier, le quali tengono anche conto della “storia passata” della temperatura, che è assunta nota sino all’istante iniziale $t = 0$. L’esempio più semplice è dato da

$$\text{flusso di calore } \mathbf{q}(t) = -(k * \nabla \theta)(t), \quad (3)$$

ove $k : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è il nucleo di memoria e $*$ indica l’usuale prodotto di convoluzione in $(-\infty, t]$. Ne risulta una legge di diffusione termica della forma

$$\theta_t + \chi_t - k * \Delta \theta = f \quad (4)$$

(si confronti con (1)) che, nelle ipotesi su k prese in considerazione, viene ad assumere un carattere iperbolico (anche se questo fatto non è evidente dalla (4)).

Nell’ambito di questa situazione fisica, si è studiato un particolare modello ove la legge di evoluzione del parametro d’ordine risulta di tipo “conservato”: si suppone cioè che la media spaziale di tale variabile rimanga costante in tempo (si pensi ad esempio a situazioni in cui χ esprime una concentrazione: tale ipotesi corrisponde allora alla conservazione della massa). In questo modo, la corrispondente equazione risulta essere del quarto ordine:

$$\mu \chi_t - \Delta(-\nu \Delta \chi + \beta(\chi) + \sigma'(\chi) - \theta) = 0 \quad (5)$$

(si confronti con (2)). In questa ricerca si è affrontato un problema di tipo Neumann per il sistema (4-5). In aggiunta alla scarsa gamma di stime a priori disponibile a causa del carattere iperbolico di (4), un’ulteriore difficoltà è dovuta alla condizione di Neumann; infatti risulta complesso il controllo del termine di vincolo $\beta(\chi)$ a causa delle scarse informazioni sulla sua media spaziale. Utilizzando ancora tecniche di approssimazione - stime a priori - compattezza, si sono ottenuti risultati di esistenza,

unicità e regolarità della soluzione, ed anche una stima di dipendenza continua, in due diversi casi fisicamente significativi [7, 8] legati a diverse ipotesi strutturali sui dati. In particolare, in [8], sulla base di considerazioni modellistiche, si è supposta una dipendenza *quadratica* del *calore latente* rispetto alla variabile di fase; ciò vale a dire che si sono sostituiti il termine χ_t in (4) con $\lambda(\chi)_t$ (ove $\lambda(\cdot)$ può avere crescita quadratica all'infinito) e, corrispondentemente, il termine θ in (5) con $\lambda'(\chi)\theta$. Le risultanti nonlinearità hanno comportato ulteriori difficoltà tecniche, che sono state superate attraverso l'analisi preliminare di un sistema opportunamente regolarizzato e quindi usando metodi di compattezza per il passaggio al limite.

Infine, questo tipo di modelli è stato ripreso in un recente lavoro [25], ove si è analizzato un *problema inverso* per la versione *parabolica* e non conservata del sistema. Si è cioè considerato il sistema (2)+(4), ma con l'aggiunta di un termine $-k_0\Delta\theta$, $k_0 > 0$, a primo membro di (4), corrispondente ad un'opportuna modifica della legge (3). Per tale sistema, supponendo nota un'informazione aggiuntiva (di fatto un certo tipo di misurazione della temperatura), si è studiata la possibilità di *identificare* il nucleo k per il quale la soluzione soddisfacesse tale informazione aggiuntiva. Il risultato ottenuto è di tipo *globale in tempo*, ma *condizionale*, cioè valido solo a patto che la soluzione soddisfi opportune proprietà (essenzialmente di limitatezza), purtroppo non direttamente deducibili dal sistema. Questo è peraltro un fenomeno che si presenta usualmente nell'analisi di problemi inversi per sistemi di evoluzione non lineari, almeno quando si cercano soluzioni *in grande*. Si segnala che nella dimostrazione è stato necessario considerare soluzioni molto regolari del problema *diretto*; pertanto, una prima parte del lavoro, che si pensa possa avere interesse autonomo, è stata dedicata a raffinare i risultati di regolarità sul sistema (2)+(4) finora noti.

3) Modelli per transizioni di fase con movimenti microscopici (lavori [5], [6], [9], [11], [15], [21], [29], [34]; ricerca in collaborazione con P. Colli - Pavia, Ph. Laurençot - Tolosa, F. Luterotti - Brescia, U. Stefanelli - IMATI Pavia).

In questa serie di lavori si sono studiati diversi problemi analitici relativi ad una generalizzazione del sistema di phase field riconducibile a un quadro modellistico recentemente proposto da M. Frémond attraverso un'analisi "a due scale" del fenomeno. In particolare, si vede il cambiamento "macroscopico" di stato come un effetto dei movimenti delle particelle microscopiche che costituiscono la sostanza, movimenti che portano un contributo non trascurabile nell'equazione di bilancio termico. Analogamente, l'evoluzione del parametro di fase (equazione "microscopica") risente dell'effetto "macroscopico" della temperatura. Una forma generale ("full model") di questo tipo di modelli è fornita dal seguente sistema di EDP:

$$\theta_t + \theta\chi_t - \Delta\theta = \mu\chi_t^2, \quad (6)$$

$$\alpha(\chi_t) + \mu\chi_t - \nu\Delta\chi + \beta(\chi) + \sigma'(\chi) = \theta, \quad (7)$$

ove per semplicità si è trascurato il termine f di sorgente che si aveva in (1), assumendo dunque che il sistema sia completamente isolato dall'esterno. Per questo motivo, anche le condizioni al bordo sono in tutti questi lavori di tipo Neumann omogeneo per entrambe le incognite.

Rispetto a (1–2), compaiono qui due termini non lineari nella prima equazione, effetto dei movimenti microscopici; inoltre, si può avere un nuovo vincolo $\alpha(\chi_t)$ in (7), che viene introdotto per forzare χ_t ad avere un segno. Questa scelta serve a descrivere, in un quadro termodinamicamente rigoroso, il comportamento di sostanze ove è consentita la transizione (ad esempio) dal liquido al solido, ma non il viceversa. In questo caso, si sceglie $\alpha = \partial I_{[0,+\infty)}$, ove $I_{[0,+\infty)}$ è l'*indicatrice* di $[0, +\infty)$. Parliamo allora di cambiamenti di fase “unidirezionali” o “irreversibili” (senza peraltro alcun legame col concetto usuale di irreversibilità in Termodinamica). Si noti inoltre che qui $\theta > 0$ è la temperatura *assoluta*; dunque il termine strettamente positivo χ_t^2 a secondo membro di (6) ha il significato di una forzante che impedisce a θ di scendere sotto 0 (zero assoluto). Oltre alla maggiore generalità, un ulteriore vantaggio del sistema (6–7) dal punto di vista fisico è infatti la consistenza termodinamica per una vasta gamma di valori di temperatura (e non solo nell’intorno della temperatura critica, come pare essere per altri modelli “imparentati” con (1–2)). Si osservi peraltro che la positività di θ (necessaria per poter dimostrare la consistenza termodinamica) non è leggibile direttamente dal sistema (6–7), ma è di fatto una proprietà non banale, recentemente provata in [29] per una classe di modelli anche più generale di quella qui descritta.

La presenza di diversi termini nonlineari nel sistema (6–7) ne rende piuttosto complicata un’analisi matematica rigorosa. In particolare, a causa della nonlinearità quadratica in (6), mentre è relativamente semplice ottenere un risultato di esistenza locale in tempo per il sistema completo [34], ben più ardua è la questione dell’esistenza globale. Da un punto di vista fisico, questa pare avere grande rilevanza; infatti l’esistenza globale ci direbbe che i termini quadratici in (6) mantengono sì θ lontana dallo zero assoluto, ma non comportano un’esplosione in tempi finiti della soluzione, il che parrebbe irragionevole dato che il sistema è isolato e si ha a disposizione una stima di conservazione dell’energia (ossia un integrale primo). Tuttavia, fino a questo punto, l’esistenza globale è stata ottenuta per il sistema completo soltanto in due situazioni, e precisamente: nel caso monodimensionale in spazio [11], ovvero imponendo “a priori” una limitazione superiore alla velocità del processo di transizione di fase [9] tramite una scelta opportuna del vincolo α , posizione che non risulta distruggere la consistenza termodinamica del modello.

In una seconda serie di lavori, si sono affrontate delle formulazioni matematiche in qualche modo semplificate del “full model” di partenza, per le quali si sono ottenuti diversi teoremi di esistenza (globale) e regolarità. Entrando nel dettaglio dei risultati, in [6] (ove si è anche fornita una dettagliata derivazione fisica del modello), si è trascurato il termine χ_t^2 in (6), sulla base della considerazione modellistica che questo abbia un ordine di grandezza inferiore rispetto agli altri termini del sistema. In [5] si è invece supposto nullo il termine di diffusione relativo alla variabile di fase, ponendo $\nu = 0$ in (7). Il modello che ne deriva, che è pienamente compatibile con la derivazione termodinamica generale e conserva in particolare tutte le nonlinearità, risulta essenzialmente una versione nonlineare del cosiddetto sistema di “phase relaxation” proposto da Frémond e Visintin negli anni ’80. Questo tipo di sistemi è strettamente legato alla modellizzazione di fenomeni di isteresi, relazione che è stata resa precisa (e studiata rigorosamente), per questa formulazione nonlineare, in [15]. Infine, si è analizzata una versione quasistazionaria del “full model” [21], ottenuta sop-

primendo il termine di rilassamento temporale relativo al parametro di fase ($\mu = 0$ in (7)): il teorema di esistenza che si è ottenuto, relativo peraltro al caso unidimensionale, sembra avere particolare interesse perché una linearizzazione attorno alla temperatura critica del sistema affrontato in [21] è strettamente legata alla formulazione debole del problema di Stefan e fornisce un ulteriore legame tra questo tipo di problemi e altri modelli più classici e studiati nella letteratura scientifica recente.

Per quanto riguarda le tecniche di dimostrazione, ci si è basati su svariate tecniche di approssimazione e di punto fisso. Tipicamente si è dapprima stabilito un risultato d'esistenza per un problema approssimante; quindi il passaggio al limite è stato raggiunto attraverso metodi di compattezza e semicontinuità. Si noti infine che alcune tecniche di discretizzazione si prestano ad essere anche implementate numericamente.

4) Perturbazione di domini per equazioni ellittiche (lavoro [12]; ricerca in collaborazione con G. Savaré - Pavia).

Si è analizzata la dipendenza della soluzione di un'equazione lineare ellittica del secondo ordine rispetto a perturbazioni del dominio. Più in dettaglio, dato un generale operatore ellittico $\mathcal{A}$ e date due soluzioni variazionali del problema di Dirichlet omogeneo

$$u \in H_0^1(\Omega_i), \quad \mathcal{A}u = f \quad \text{in } \Omega_i, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

supportate su domini diversi Ω_1, Ω_2 , si sono ottenute stime della loro differenza sia nella norma dell'energia che in quella L^2 . Tali stime vengono a dipendere dalle norme naturali dei dati, da costanti legate alla geometria dei domini e da un'opportuna nozione di distanza tra questi. Le condizioni di regolarità sotto le quali si è riusciti ad ottenere tali stime richiedono che almeno uno dei domini (e.g., Ω_1) sia di regolarità Lipschitz; Ω_2 può avere regolarità arbitraria, purché sia “sufficientemente vicino” al primo dominio. Più precisamente, si richiede un controllo sulla distanza di Hausdorff delle frontiere; in questo modo, si riesce a comparare la soluzione sul dominio irregolare Ω_2 con la soluzione supportata su un intorno opportuno del dominio regolare Ω_1 .

Il metodo utilizzato scompone il problema in varie fasi: si è dapprima inquadrata la questione in ambito astratto, riconducendo le stime desiderate a questioni di distanza tra la soluzione supportata su Ω_1 ed un generico spazio $H_0^1(\Omega)$, con Ω non necessariamente coincidente con Ω_2 , ma in parte arbitrario.

Quindi, il calcolo di tale distanza è stato riportato a un problema geometrico, che viene affrontato utilizzando una tecnica di localizzazione (“modellata” sul classico metodo delle traslazioni di Nirenberg), originariamente sviluppata da G. Savaré in una situazione di maggiore regolarità e qui opportunamente adattata al caso Lipschitz. Attraverso un tale approccio, si sono ottenute anche stime più accurate sotto migliori ipotesi di regolarità sui dati o sui domini (e.g., entrambi Lipschitz). Infine, sono attese applicazioni di questi risultati nella direzione dello studio di equazioni di evoluzione di tipo parabolico in regioni non cilindriche sotto ipotesi molto generali. Queste problematiche saranno affrontate in un lavoro attualmente in preparazione.

5) Modelli di separazione in leghe binarie con transizione di fase (lavori

[16], [33]; ricerca in collaborazione con D. Kessler, J.F. Scheid - Nancy, U. Stefanelli - IMATI Pavia).

Si è studiato un particolare modello di campo di fase relativo ad una lega binaria caratterizzata dalla presenza di due parametri d'ordine: una variabile di fase χ , che descrive la transizione solido-liquido, e una di concentrazione c , che descrive la proporzione tra le due componenti metalliche. Innanzitutto si è effettuata la derivazione del relativo modello matematico impostando un problema di “gradient-flow” per un opportuno funzionale di energia libera scelto sulla base di considerazioni di carattere termodinamico. Come ipotesi costitutive, si è supposto che il fenomeno sia essenzialmente isoterma, che le componenti tendano a separarsi (minore energia in prossimità delle configurazioni pure), e che ci sia conservazione di massa. Se ne è ottenuto un problema di Neumann per il seguente sistema di due equazioni paraboliche

$$\mu\chi_t - \nu\Delta\chi = F_1(\chi) + cF_2(\chi), \quad (9)$$

$$c_t - \operatorname{div} \left[m(\chi, c) \nabla (-\nu\Delta c + \beta(c) + \sigma'(c) + g(\chi)) \right] = 0, \quad (10)$$

rispettivamente del secondo (per la fase) e del quarto ordine (per la concentrazione). Le principali difficoltà di un tale sistema sono costituite dalla presenza del vincolo β e del coefficiente di mobilità m , che può dipendere da entrambe le variabili (anche se è assunto limitato e non degenerare). Le nonlinearità F_1 , F_2 , σ' e g sono invece supposte più regolari (Lipschitz) e risultano dunque più facili da trattare.

In [16] si è provato un teorema di esistenza globale per il sistema (9–10) sotto ipotesi abbastanza generali sui dati e sul coefficiente di mobilità. Per quanto riguarda la regolarità, sono stati ottenuti diversi risultati assumendo condizioni più restrittive sui dati e supponendo m costante. In una tale situazione si ha anche l'unicità della soluzione. Questi risultati (regolarità e unicità) sono stati parzialmente estesi in [33] al caso di una mobilità dipendente dalla soluzione.

Infine, sempre in [16], si è studiata una situazione fisica in cui il fenomeno di separazione avviene in tempi molto più rapidi rispetto al cambiamento di fase. Questo ha portato ad impostare un'opportuna analisi asintotica del modello, ottenibile formalmente prendendo $\nu = \sigma' = 0$ in (10), e corrispondente a un limite singolare che accoppia l'equazione (9) con un problema di tipo Hele-Shaw per la variabile di concentrazione. In questo quadro, si è dimostrato un risultato di convergenza delle soluzioni utilizzando opportune tecniche di stime a priori - compattezza.

6) Modelli di “coarsening” (ispessimento) in materiali elastici anisotropi (lavori [10], [13]; ricerca in collaborazione con E. Bonetti - Pavia, P. Colli - Pavia, W. Dreyer - WIAS Berlino, G. Gilardi - Pavia, J. Sprekels - WIAS Berlino).

Si è analizzato un modello matematico relativo al fenomeno di *coarsening* (separazione delle componenti pure in regioni di misura crescente col tempo), proprio di talune leghe metalliche. Durante questo processo, tali sostanze sono soggette ad effetti elastici provenienti sia da deformazioni indotte dall'esterno sia dalle tensioni interne generate dall'interazione tra le diverse strutture cristalline delle componenti. Un modello matematico di tale processo è stato recentemente proposto da W. Dreyer

e W. Müller e consta di un sistema di tipo elasticità lineare (con tensore elastico C dipendente dalla concentrazione χ) per lo spostamento $\mathbf{u}$:

$$-\operatorname{div}(C(\chi)\varepsilon(\mathbf{u})) = \mathbf{f}(\chi) \quad (11)$$

(ove $\varepsilon(\mathbf{u})$ è lo *strain* simmetrizzato), accoppiato ad una relazione parabolica del quarto ordine con termine di viscosità per la concentrazione χ (anche qui si ha conservazione di massa):

$$\mu\chi_t - \Delta(\delta\chi_t - a(\chi)\Delta\chi + \beta(\chi) + \gamma(\chi, \varepsilon(\mathbf{u}))) = 0. \quad (12)$$

Rispetto ai modelli di campo di fase più usuali, l'equazione (12) presenta due grosse difficoltà: la nonlinearità $a(\chi)$, legata alle diverse proprietà delle componenti, che moltiplica il termine di ordine più alto, e il termine di accoppiamento $\gamma(\chi, \varepsilon(\mathbf{u}))$ che può avere dipendenza quadratica da $\varepsilon(\mathbf{u})$.

Per quanto riguarda i risultati, si sono ottenute l'esistenza globale e l'unicità della soluzione per il sistema completo (11–12) in una dimensione di spazio [10] utilizzando tecniche di punto fisso (Schauder) e compattezza. Sotto ipotesi più restrittive, questi risultati possono essere parzialmente estesi al caso bidimensionale. Si noti che queste restrizioni sulla dimensione sono essenzialmente dovute alla presenza del termine γ e sono usuali in questo tipo di sistemi con accoppiamento quadratico. In un secondo lavoro [13], si è quindi analizzata la sola equazione (12) relativa alla concentrazione, ove il termine γ legato agli sforzi elastici è stato assunto come un dato sufficientemente regolare. In questa situazione si sono ottenuti ulteriori risultati di esistenza (anche nel caso tridimensionale), che si spera di poter applicare, almeno parzialmente, al sistema completo. In [13] si sono anche studiati alcuni limiti singolari dell'equazione (12); in particolare si è mostrato che la classica equazione di Cahn-Hilliard (con vincolo β) può essere ottenuta come limite dell'equazione (12).

7) Modelli di danneggiamento (lavori [17], [27]; ricerca in collaborazione con E. Bonetti - Pavia, A. Segatti - Pavia).

Si è studiato un modello matematico, essenzialmente dovuto nella sua derivazione fisica a M. Frémond, che descrive il danneggiamento di materiali elastici. Come nei lavori descritti al punto 2), l'evoluzione dinamica del materiale considerato viene scomposta in due diverse scale spaziali: si assume infatti che il processo di danneggiamento, descritto da una variabile di stato χ (ove $\chi = 1$ indica il materiale integro e $\chi = 0$ il materiale completamente danneggiato), sia dovuto all'effetto dei movimenti microscopici interni al materiale. I movimenti macroscopici, descritti dalla variabile $\mathbf{u}$, generano invece tensioni di tipo elastico. Il modello risultante descrive l'interazione tra le diverse scale spaziali: le forze macroscopiche deteriorano il materiale e provocano il danneggiamento; corrispondentemente, il materiale ha una minore risposta alle sollecitazioni elastiche. Se ne deriva la seguente famiglia di modelli:

$$\omega\mathbf{u}_{tt} - \operatorname{div}[C(\chi)(\varepsilon(\mathbf{u}) + \tau\varepsilon(\mathbf{u}_t))] = \mathbf{f}, \quad (13)$$

$$\mu\chi_t + \alpha(\chi_t) - \delta\Delta\chi_t - \nu\Delta\chi + \beta(\chi) = w - \frac{1}{2}(C'(\chi)\varepsilon(\mathbf{u})) : \varepsilon(\mathbf{u}), \quad (14)$$

descritta dal variare dei parametri non negativi ω, τ, δ , ove il tensore elastico $C(\chi)$ tende a degenerare quando il danneggiamento è totale ($\chi = 0$). Si noti la presenza dei

due vincoli β (che forza $\chi \in [0, 1]$) e α (che forza $\chi_t \in (-\infty, 0]$). Si assume dunque che il danno, una volta creato, non possa essere riparato. È evidente che la presenza simultanea dei due vincoli produca notevoli difficoltà analitiche. Infine, il termine $w > 0$ è una costante che rappresenta l'energia di coesione del materiale: quanto più w è grande, tanto più il materiale resiste al deterioramento.

Per questi modelli si sono ottenuti soltanto risultati di esistenza locale in tempo, utilizzando nelle dimostrazioni il teorema di punto fisso di Schauder; il carattere locale delle soluzioni è legato al fatto che si vuole evitare che il tensore elastico degeneri. Dunque, ci si è limitati a considerare un intervallo temporale (di ampiezza descritta dalle stime a priori ed effettivamente computabile in funzione dei dati) in cui si avesse la certezza che il danneggiamento non fosse totale in alcun punto. In particolare, si sono considerati due diversi problemi per il sistema (13–14). Dapprima si è analizzato il caso elastico *quasistazionario* ($\omega = \tau = 0$ in (13)) [17], ove tuttavia, per ragioni di regolarità, si è dovuta assumere non nulla la viscosità in (14) ($\delta > 0$), cosa che non pare del tutto soddisfacente dal punto di vista modellistico. Tale condizione si è potuta eliminare (prendendo dunque $\delta > 0$) nel caso *viscoelastico dinamico* ($\omega, \tau > 0$ in (13)) studiato in [27] e probabilmente più aderente alla situazione fisica reale (anche se tecnicamente più complesso dal punto di vista analitico). Si noti infine che alcune delle tecniche usate nelle dimostrazioni si basano sui lavori precedentemente descritti al punto 2) sulle transizioni di fase con movimenti microscopici.

8) Modelli di tipo Penrose - Fife (lavori [14], [18], [19], [20], [22], [23], [28]; ricerca in collaborazione con P. Colli - Pavia, E. Feireisl - AS CR Praga, G. Gilardi - Pavia, E. Rocca - Milano).

Si sono analizzati alcuni modelli di phase field cosiddetti “di Penrose-Fife”, dai nomi degli autori cui è dovuta la loro derivazione. Tali modelli sono fondamentalmente caratterizzati dalla presenza del reciproco di θ nell'equazione cinetica che descrive l'evoluzione di χ :

$$\mu\chi_t - \nu\Delta\chi + \beta(\chi) + \sigma'(\chi) = -\frac{1}{\theta}. \quad (15)$$

Al contrario, l'equazione di bilancio energetico

$$\theta_t + \chi_t - \Delta\alpha(\theta) = f \quad (16)$$

può qui assumere varie forme fisicamente motivate, a seconda della scelta della funzione α legata alla legge di flusso di calore. Questa può essere lineare ($\alpha(\theta) = \theta$), come in (1–2), oppure può presentare anch'essa una dipendenza dalla temperatura inversa (ad esempio se $\alpha(\theta) = -1/\theta$, ma altri casi sono significativi). I modelli di Penrose-Fife, come quelli descritti al punto 2), risultano termodinamicamente rigorosi per ogni valore della temperatura *assoluta* θ ; inoltre, essi estendono il modello “standard” (1–2), nel senso che questo può essere ottenuto tramite una linearizzazione di (15–16) attorno alla temperatura di equilibrio.

Per il modello di Penrose-Fife, anch'esso molto studiato nella letteratura recente, si sono affrontati diversi problemi specifici. Per prima cosa, si è considerato [14] il caso in cui si il flusso di calore è di tipo Fourier ($\alpha(\theta) = \theta$), ma l'equazione corrispondente a (15) è del quart'ordine (dinamica di tipo conservato, cfr. (5)), La

difficoltà principale del problema sta nell'ottenere una stima a priori della temperatura inversa. Questa, infatti, non si può dedurre dall'equazione (16) (ora coincidente con (1)), ma va ricavata sfruttando l'equazione cinetica, e sarà dunque di carattere molto debole. Per questo problema si è dimostrata l'esistenza di una soluzione debole estendendo un risultato di Laurençot valido nel caso non conservato.

Successivamente, si è affrontato ancora il modello "conservato", ma stavolta con legge di flusso "speciale" della forma

$$\alpha(\theta) \sim \theta - 1/\theta \quad (17)$$

(o generalizzazioni) e considerando anche un termine di memoria termica (cfr. (4)). La legge (17) è stata introdotta in letteratura perché sembra fisicamente motivata sia per temperature vicine allo zero assoluto, sia per temperature alte. Per il corrispondente sistema di EDP, si è studiato il problema di limite singolare ottenuto facendo tendere a zero il parametro μ di rilassamento temporale relativo all'equazione cinetica. L'analisi è stata piuttosto complessa, perché per dimostrare il relativo risultato di convergenza si sono dovute assumere ipotesi molto forti sui dati iniziali, nonché mostrare la compatibilità di queste col problema quasistazionario ottenuto come limite.

In un terzo lavoro [19], si è analizzato un sistema di tipo non conservato nel parametro di fase assumendo condizioni di Neumann non omogenee per la temperatura e considerando una generalizzazione della legge (17). Con tecniche di regolarizzazione, stime a priori, compattezza, si è dimostrato un risultato di esistenza e unicità sotto ipotesi molto generali sui dati. La difficoltà consiste qui nel controllo della media spaziale della temperatura inversa, che non si può ottenere con una disuguaglianza di tipo Poincaré, ma va ricavato dall'equazione cinetica. In effetti, fino a questo momento in letteratura era noto solo il caso con sorgente termica a media nulla.

Gli ultimi sviluppi relativi all'analisi di questo tipo di modelli sono rivolti al tentativo di investigarne il comportamento per tempi lunghi e, più in dettaglio, di dimostrare l'esistenza dell'attrattore globale. Il problema è tutt'altro che semplice a causa del carattere singolare dell'equazione di bilancio termico, e i risultati in letteratura sono pochi e parziali. Tuttavia, nel caso fisicamente significativo della legge di flusso (17), che garantisce una maggiore coercività dell'equazione (16) rispetto a θ , si sono già affrontati con successo diversi casi per i quali si è dimostrata l'esistenza dell'attrattore universale in senso forte, cosa che non era precedentemente nota. Ciò vale a dire che si ottengono buone informazioni sul comportamento per tempi lunghi sia della temperatura che della sua inversa.

Più in dettaglio, i risultati ottenuti (che sono tutti piuttosto recenti) valgono, con differenze non solo tecniche nelle dimostrazioni, nel caso del calore latente lineare [22] sia per il modello nonconservato sia per quello conservato; nel caso quadratico (la cui rilevanza fisica è stata già sottolineata in precedenza) [20], solo per il sistema nonconservato. Infine, questi risultati sono stati estesi in [23] ad un sistema di Penrose-Fife di tipo parabolico (in θ) - iperbolico (in χ), caratterizzato dalla presenza nel primo membro della (15) di un termine $\kappa\chi_{tt}$ legato ad un effetto di ritardo nella risposta del sistema alla sollecitazione che determina il cambiamento di stato. Anche in questo caso, si ha esistenza dell'attrattore universale; tuttavia la dimostrazione comporta nuove e notevoli difficoltà tecniche e richiede l'uso di un quadro funzionale

decisamente *ad hoc*. Le cause sono l'assenza (non sorprendente) di un effetto regolarizzante nell'equazione *iperbolica* corrispondente a (15) e quella (più sorprendente) di un funzionale di Liapounov globale per il sistema, almeno nel caso considerato della legge di flusso (17). Si noti infine che l'approccio usato nell'analisi di tutti questi problemi di comportamento asintotico pare poter essere adattato al fine di trattare classi più generali di sistemi di evoluzione singolari.

Un ulteriore contributo [28] sul modello di Penrose-Fife è descritto al successivo punto 10).

9) Modelli non isotermini di tipo Cahn - Hilliard - Gurtin (lavori [24], [26]; ricerca in collaborazione con A. Miranville - Poitiers).

Un recente tema di ricerca riguarda una classe di modelli di tipo Allen-Cahn e Cahn-Hilliard originariamente proposti nel caso isotermino da M. Gurtin tramite un nuovo approccio pienamente compatibile coi principi della Termodinamica. La prima parte di questa ricerca [24] è peraltro di carattere puramente formale (modellistico o, se si vuole, fisico-matematico) e consiste nel riprendere lo schema di Gurtin ed estenderlo (il che comporta un certo numero di difficoltà) ad una situazione esplicitamente dipendente da θ . Le equazioni ottenute presentano una forte parentela sia con i modelli di tipo Frémond descritti al punto 3) sia con quelli di tipo Penrose-Fife (punto 8)), ma sono parecchio più generali e in certi casi del tutto nuove.

Noto il quadro fisico generale, in un secondo momento [26] si è svolta un'analisi rigorosa di una situazione particolarmente significativa, data dal sistema

$$(\theta^2)_t - \theta \chi \chi_t - \Delta \theta = \mu \chi_t^2, \quad (18)$$

$$\mu \chi_t - \nu \Delta \chi + \beta(\chi) + \sigma'(\chi) = -\theta \chi, \quad (19)$$

e strettamente imparentata con i modelli del punto 3). Si noti peraltro la presenza del termine θ^2 in (18), dovuta a una particolare forma dell'energia libera del sistema. Sotto opportune ipotesi di regolarità su β , si sono dimostrate l'esistenza e l'unicità di una soluzione globale per il problema di Neumann omogeneo relativo a questo sistema, nonché la stretta positività della temperatura. Un ruolo chiave nella dimostrazione è svolto proprio dalla presenza del termine θ^2 , che consente di usare alcune stime per *soluzioni rinormalizzate* di equazioni di evoluzione con dati L^1 , al fine di controllare i "valori grandi" della temperatura in modo indipendente dal tempo.

10) Studio dell' ω -limite di sistemi di evoluzione (lavori [28], [30], [31]; ricerca in collaborazione con M. Grasselli - Politecnico di Milano, E. Feireisl - AS CR Praga, H. Petzeltová - AS CR Praga).

Il tema di ricerca cui ci si è dedicati più recentemente riguarda l'applicazione a certi modelli di campo di fase del cosiddetto *metodo di Simon-Łojasiewicz* per lo studio dell' ω -limite delle traiettorie generate dalle soluzioni di sistemi di EDP di evoluzione. Per chiarire tale metodo, consideriamo per semplicità la sola equazione (2), che è quella che pone il nocciolo della questione. Associate opportune condizioni al bordo, è in genere non difficile mostrare che l' ω -limite contiene solo *stati stazionari*, ossia

coppie $(\theta_\infty, \chi_\infty)$ che risolvono l'equazione

$$-\nu\Delta\chi_\infty + \beta(\chi_\infty) + \sigma'(\chi_\infty) = \theta_\infty \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^N. \quad (20)$$

È ben noto che, in assenza di condizioni sulla geometria di Ω , se la somma $\beta + \sigma'$ non è monotona un generico problema ai limiti per (20) può avere infinite soluzioni. La disuguaglianza di Simon-Łojasiewicz consente di dimostrare che, ciononostante, se $\beta + \sigma'$ è una funzione *analitica*, allora “tutta” la traiettoria $(\theta(t), \chi(t))$ (i.e., non solo una sottosuccessione) del problema evolutivo tende, per $t \rightarrow +\infty$, a un'unica coppia $(\theta_\infty, \chi_\infty)$, o in altre parole che l' ω -limite consiste di un solo elemento.

Tale metodo è stato recentemente applicato da vari autori anche a problemi legati ai modelli di campo di fase e i risultati di questa ricerca si pongono proprio in questo filone. Più in dettaglio, in [28] si è analizzato il modello di Penrose-Fife, con $\alpha(\theta) = -\theta^{-1}$ (cfr. (16)) e condizioni al bordo di Dirichlet (necessariamente non omogenee) per θ . Per un tale problema si è mostrato che l' ω -limite consiste di un'unica coppia $(\theta_\infty, \chi_\infty)$, ove θ_∞ è il rilevamento armonico del valore al bordo di θ e χ_∞ è la soluzione della versione stazionaria di (15). La difficoltà principale nella dimostrazione è connessa al carattere singolare di (16) ed in effetti un controllo uniforme in tempo delle potenze positive di θ , necessario per poter passare al limite, è stato ottenuto solo tramite un metodo di stime a priori decisamente non standard e “ad hoc”.

Altri recenti contributi su questo tema riguardano invece il modello classico (1–2). In [30], si è studiato l' ω -limite di tale sistema nel caso di β singolare (ossia di dominio D limitato – si pensi per semplicità a $D = [-1, 1]$). In particolare, attraverso tecniche di regolarità e di confronto, si è compiuto uno studio dettagliato delle condizioni sui dati (in particolare su β e σ') sotto cui la variabile χ , almeno per i tempi sufficientemente grandi, resta ben separata in norma L^∞ dagli stati puri $\chi = \pm 1$. Ciò consente di “escludere” tali singolarità (che distruggono l'analiticità di β) e in particolare di applicare il metodo di Simon-Łojasiewicz per caratterizzare l' ω -limite. Infine, in [31] si è studiato il modello di campo di fase parabolico-iperbolico (aggiunta di $\kappa\chi_{tt}$ a primo membro di (2)) e anche qui si è mostrato che, sotto opportune condizioni sui dati, l' ω -limite consiste di un unico elemento. Contrariamente al caso precedente, ci si è qui limitati a considerare funzioni β non singolari (i.e., $D = \mathbb{R}$), in quanto non pare semplice dimostrare una proprietà di separazione da eventuali barriere ± 1 in assenza di un effetto regolarizzante (invece presente per il sistema completamente parabolico). Segnaliamo infine che nuove ricerche su questo tema paiono avviate in modo promettente.

III. Pubblicazioni

Lavori pubblicati (o in corso di stampa – in ogni caso accettati per la pubblicazione) su riviste scientifiche:

- [1] G. Schimperna, *Weak solution to a phase-field transmission problem in a concentrated capacity*, Math. Methods Appl. Sci., **22** (1999), 1235–1254.
- [2] G. Schimperna, *Some convergence results for a class of nonlinear phase-field evolution equations*, J. Math. Anal. Appl., **250** (2000), 406–434.
- [3] G. Schimperna, *Singular limit of a transmission problem for the parabolic phase-field model*, Appl. Math., **45** (2000), 217–238.
- [4] G. Schimperna, *Abstract approach to evolution equations of phase-field type and applications*, J. Differential Equations, **164** (2000), 395–430.
- [5] P. Colli, F. Luterotti, G. Schimperna, U. Stefanelli, *Global existence for a class of generalized systems for irreversible phase changes*, NoDEA – Nonlinear Differential Equations Appl., **9** (2002), 255–276.
- [6] F. Luterotti, G. Schimperna, U. Stefanelli, *Existence result for a nonlinear model related to irreversible phase changes*, M³AS – Math. Models Methods Appl. Sci., **11** (2001), 808–825.
- [7] P. Colli, G. Gilardi, M. Grasselli, G. Schimperna, *The conserved phase-field system with memory*, Adv. Math. Sci. Appl., **11** (2001), 265–291.
- [8] P. Colli, G. Gilardi, M. Grasselli, G. Schimperna, *Global existence for the conserved phase field model with memory and quadratic nonlinearity*, Portugal. Math., **58** (2001), 159–170.
- [9] F. Luterotti, G. Schimperna, U. Stefanelli, *Global solution to a phase field model with irreversible and constrained phase evolution*, Quart. Appl. Math., **60** (2002), 301–316.
- [10] E. Bonetti, P. Colli, W. Dreyer, G. Gilardi, G. Schimperna, J. Sprekels, *On a model for phase separation in binary alloys driven by mechanical effects*, Phys. D, **165** (2002), 48–65.
- [11] Ph. Laurençot, G. Schimperna, U. Stefanelli, *Global existence of a strong solution to the one-dimensional full model for irreversible phase transitions*, J. Math. Anal. Appl., **271** (2002), 426–442.
- [12] G. Savaré, G. Schimperna, *Domain perturbations and estimates for the solutions of second order elliptic equations*, J. Math. Pures Appl., **81** (2002), 1071–1112.
- [13] E. Bonetti, W. Dreyer, G. Schimperna, *Global solution to a generalized Cahn-Hilliard equation with viscosity*, Adv. Differential Equations, **8** (2003), 231–256.
- [14] E. Rocca, G. Schimperna, *The conserved Penrose-Fife system with Fourier heat flux law*, Nonlinear Anal., **53** (2003), 1089–1100.

[15] F. Luterotti, G. Schimperna, U. Stefanelli, *A generalized phase relaxation model with hysteresis*, *Nonlinear Anal.*, **55** (2003), 381–398.

[16] D. Kessler, J.-F. Scheid, G. Schimperna, U. Stefanelli, *Study of a system for the isothermal separation of components in a binary alloy with change of phase*, *IMA J. Appl. Math.*, **69** (2004), 233–257.

[17] E. Bonetti, G. Schimperna, *Local existence for Frémond’s model of damage in elastic materials*, *Contin. Mech. Thermodyn.*, **16** (2004), 319–335.

[18] E. Rocca, G. Schimperna, *Singular limit of a conserved Penrose-Fife model with special heat flux law and memory effects*, *Asymptot. Anal.*, **36** (2003), 285–301.

[19] P. Colli, G. Gilardi, E. Rocca, G. Schimperna, *On a Penrose-Fife phase-field model with non-homogeneous Neumann boundary conditions for the temperature*, *Differential Integral Equations*, **17** (2004), 511–534.

[20] E. Rocca, G. Schimperna, *Universal attractor for a Penrose-Fife system with special heat flux law*, *Mediterranean Journal of Mathematics*, **1** (2004), 109–121.

[21] G. Schimperna, U. Stefanelli, *A quasi-stationary phase field model with micro-movements*, *Appl. Math. Optim.*, **50** (2004), 67–86.

[22] E. Rocca, G. Schimperna, *Universal attractor for some singular phase transition systems*, *Phys. D*, **192** (2004), 279–307.

[23] E. Rocca, G. Schimperna, *Global attractor for a parabolic-hyperbolic Penrose-Fife phase field system*, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, accettato per la pubblicazione.

[24] A. Miranville, G. Schimperna, *Nonisothermal phase separation based on a microforce balance*, *Discrete Contin. Dyn. Syst. (B)*, accettato per la pubblicazione.

[25] A. Lorenzi, E. Rocca, G. Schimperna, *Direct and inverse problems for a parabolic integro-differential system of Caginalp type*, *Adv. Math. Sci. Appl.*, accettato per la pubblicazione.

[26] A. Miranville, G. Schimperna, *Global solution to a phase transition model based on a microforce balance*, *J. Evol. Equ.*, accettato per la pubblicazione.

[27] E. Bonetti, G. Schimperna, A. Segatti, *On a doubly non linear model for the evolution of damaging in viscoelastic materials*, *J. Differential Equations*, accettato per la pubblicazione.

[28] E. Feireisl, G. Schimperna, *Large time behavior of solutions to Penrose-Fife phase change models*, *Math. Methods Appl. Sci.*, accettato per la pubblicazione.

Preprint - lavori sottoposti per la pubblicazione:

[29] G. Schimperna, U. Stefanelli, *Positivity of the temperature for phase transitions with micro-movements*, sottoposto per la pubblicazione.

[30] M. Grasselli, H. Petzeltová, G. Schimperna, *Long time behavior of solutions to the Caginalp system with singular potential*, sottoposto per la pubblicazione.

[31] M. Grasselli, H. Petzeltová, G. Schimperna, *Convergence to stationary solutions for a parabolic-hyperbolic phase-field system*, sottoposto per la pubblicazione.

Lavori pubblicati su proceedings:

[32] G. Schimperna, *Convergence of phase-field equations to the Stefan model*, Proceedings of the PCC99 ESF-AMIF Workshop (Warsaw, Poland, 24-27/6/1999), T. A. Kowalewski, F. Stella, J. Banaszek, J. Szmyd editors, IPPT-PAN Reports, **5** (1999), 131–134.

[33] J.-F. Scheid, G. Schimperna, *Regularity and uniqueness results for a phase change problem in binary alloys*, Proceedings of the “Fourth European Conference on Elliptic and Parabolic Problems - Rolduc and Gaeta 2001”, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2002, 475–484.

[34] F. Luterotti, G. Schimperna, U. Stefanelli, *Local solution to Fremond’s full model for irreversible phase transitions*, Proc. “Modelli Matematici e Problemi Analitici per Materiali Speciali”, Cortona, 25-29 giugno 2001, “Mathematical Models and Methods for Smart Materials”, M. Fabrizio, B. Lazzari & A. Morro (eds.), Ser. Adv. Math. Appl. Sci. 62, World Scientific Publishing Co. 2002, 323–328.

[35] F. Luterotti, G. Schimperna, U. Stefanelli, *Existence results for a phase transition model based on microscopic movements*, sottoposto per la pubblicazione.

Tesi di Dottorato:

[D] G. Schimperna, *Transmission Problems for Nonlinear Parabolic Systems of Phase-field Type*, PhD. Thesis, University of Pavia, 2000.

IV. Attività didattica

Nel seguito si riporta la descrizione dell'attività didattica, divisa per anni accademici ed elencata in ordine cronologico inverso. Ove si riporta la dicitura “*Titolarità...*”, si intende che, in tali casi, si è avuta, per supplenza o per contratto, la titolarità effettiva dell'insegnamento. Negli altri casi, le lezioni o esercitazioni sono state svolte sotto la forma di attività didattiche di supporto. Tutta l'attività didattica elencata è stata svolta presso l'Università degli Studi di Pavia.

Anno accademico 2004/05:

- Corso di “EQUAZIONI DIFFERENZIALI E SISTEMI DINAMICI” (in collaborazione con Pierluigi Colli), Corsi di Laurea in Matematica e in Fisica (lezioni + esercitazioni, *Titolarità per supplenza*).
- Corso di “ISTITUZIONI DI MATEMATICHE”, Corso di Laurea in Scienze Biologiche (lezioni + esercitazioni, *Titolarità per supplenza*, si tratta di due moduli distinti in parallelo).

Anno accademico 2003/04:

- Corso di “CONCETTI DI ANALISI MATEMATICA DI BASE”, Corsi di Laurea in Matematica e in Fisica (solo esercitazioni).
- Corso di “EQUAZIONI DIFFERENZIALI E SISTEMI DINAMICI”, Corso di Laurea in Fisica (lezioni + esercitazioni, *Titolarità per supplenza*).
- Corso di “COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DI BASE” (in collaborazione con Daniele Boffi), Corso di Laurea in Fisica (lezioni + esercitazioni).

Anno accademico 2002/03:

- Corso di “EQUAZIONI DIFFERENZIALI E SISTEMI DINAMICI” (in collaborazione con Alessandro Torelli), Corso di Laurea in Matematica (lezioni + esercitazioni).
- Corso di “EQUAZIONI DIFFERENZIALI E SISTEMI DINAMICI”, Corso di Laurea in Fisica (lezioni + esercitazioni, *Titolarità per supplenza*; N.B.: è un corso completamente distinto dal precedente).
- Corso di “COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DI BASE” (in collaborazione con Daniele Boffi), Corso di Laurea in Fisica (lezioni + esercitazioni).

Anno accademico 2001/02:

- Corso di “STRUMENTI INFORMATICI E MATEMATICI DI BASE (SIMBA)”, modulo di “MATEMATICA”, Corso di Laurea in Matematica (lezioni + esercitazioni, *Titolarità per supplenza*).
- Corso di “EQUAZIONI DIFFERENZIALI E SISTEMI DINAMICI”, Corso di Laurea in Fisica (lezioni + esercitazioni, *Titolarità per supplenza*).

Anno accademico 2000/01:

- Corso di “TEORIA DELLE FUNZIONI”, II modulo (in collaborazione con Gianni Gilardi), Corso di Laurea in Matematica (solo lezioni, *Titolarità per supplenza*).
- Corso di “ANALISI MATEMATICA II”, Corso di Laurea in Fisica (solo valutazione degli studenti).
- Corso di “ANALISI MATEMATICA A”, Facoltà di Ingegneria (solo esercitazioni).
- Corso Integrato di “MATEMATICA, FISICA E STATISTICA”, modulo di “MATEMATICA”, Corso di Laurea in Scienze Motorie (lezioni + esercitazioni, *Titolarità per supplenza*).

Anno accademico 1999/2000:

- Corso di “ANALISI MATEMATICA 1”, Facoltà di Ingegneria (solo esercitazioni).
- Corso Integrato di “MATEMATICA, FISICA E STATISTICA”, modulo di “MATEMATICA”, Corso di Laurea in Scienze Motorie (lezioni + esercitazioni, *Titolarità per contratto*).

Anno accademico 1998/99:

- Corso di “ANALISI MATEMATICA 1”, Facoltà di Ingegneria (solo esercitazioni).