COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DI BASE

Prova scritta del 18 gennaio 2010

Esercizio 1. Determinare il più grande insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}$ tale che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} nxe^{-n(x^2-4)+4}$$

converga uniformemente sui compatti di Ω.

Esercizio 2. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}$, dove f_n è definita da

$$f_n : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \frac{e^{-x/n}}{n^\alpha + x^2}.$$

(a) Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite puntuale della successione $\{f_n\}$.

(b) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha convergenza uniforme in $(0, +\infty)$[1].

(c) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x,$$

giustificando la risposta data.

Esercizio 3. È possibile trovare una funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, integrabile secondo Lebesgue su $(0, +\infty)$ (eventualmente con integrale pari a $+\infty$ oppure a $-\infty$) e tale che

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = 1\ ?$$

[1] In certi casi può essere utile valutare $f_n(x_n)$ per un'opportuna scelta della successione $\{x_n\}$