COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DI BASE

Prova scritta del 16 settembre 2009

Esercizio 1. Determinare i punti di massimo e di minimo assoluto della funzione

$$f(x,y,z) = e^{xyz}$$

sulla superficie sferica

$$Z = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1\big\}.$$

Esercizio 2. Si considerino le successioni di funzioni $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ definite da

$$f_n(x) := \frac{\sin x^n}{x^n}, \qquad g_n(x) := \frac{\sin x^n}{x^{n+1}},$$

ove, in entrambi i casi, $x \in (0,+\infty)$.

(a) Determinare i limiti puntuali f di $\{f_n\}$ e g di $\{g_n\}$.

(b1) È vero che $f_n \to f$ uniformemente in $(0,+\infty)$?

(b2) È vero che $f_n \to f$ uniformemente in $(0,1/2)$?

(b3) È vero che $f_n \to f$ uniformemente in $(2,+\infty)$?

(c1) È vero che $g_n \to g$ uniformemente in $(0,+\infty)$?

*(c2, *)* È vero che $g_n \to g$ uniformemente in $(0,1/2)$?

(c3) È vero che $g_n \to g$ uniformemente in $(2,+\infty)$?

(d) Calcolare il

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\;\mathrm{d}x.$$

(e) Calcolare il

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\;\mathrm{d}x.$$

N.B.: la domanda contrassegnata con un asterisco è considerevolmente più difficile delle altre.