

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DI BASE

Prova scritta del 16 giugno 2009

Esercizio 1. Sia data la funzione

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Phi(x, y, z) = (3x^2 + 2y^3 - 6z, 2x^3 + 3y^2 - 6z)$$

e sia $Z(\Phi)$ l'insieme degli zeri di Φ , ovvero

$$Z(\Phi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \Phi(x, y, z) = (0, 0)\}.$$

(a) Determinare se $Z(\Phi)$ contiene punti nei quali il teorema delle funzioni implicite non è applicabile (ovvero punti nel cui intorno $Z(\Phi)$ potrebbe non essere grafico di una curva regolare).

(b) Detta γ la curva implicitamente definita da $Z(\Phi)$ nell'intorno del punto $P = (2, 2, 14/3) \in Z(\Phi)$, determinare (a meno del modulo e del segno) il vettore tangente a γ in P .

Esercizio 2. Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n^{-2}} (x^{-1/2} - n^2) \log(nx) \, dx$$

giustificando la risposta data.