

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DI BASE

Prova scritta del 16 febbraio 2010

Esercizio 1. Calcolare, al variare di $x \in (-1, 1)$, il

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (n+m)x^n.$$

Esercizio 2. Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ sia data la funzione

$$F_\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_\lambda(x, y) := e^{xy} - \lambda xy - 1$$

e sia

$$Z_\lambda := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F_\lambda(x, y) = 0\}.$$

Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, i punti irregolari di Z_λ , ovvero i punti in cui non è applicabile il Teorema delle funzioni implicite.

Esercizio 3. Si consideri la successione di forme differenziali $\{\omega_n\}$ definita da

$$\omega_n(x, y) := (x^n - y^{n-1}) dx + (x^{n-1} + y^n) dy$$

e sia γ una parametrizzazione della circonferenza unitaria percorsa una volta in senso antiorario.

(a) Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\gamma \omega_n.$$

(b) Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/3} \int_\gamma \omega_n.$$

(c) Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty, n \text{ pari}} n^{2/3} \int_\gamma \omega_n.$$

Suggerimento: per i punti (b) e (c) può essere utile la disuguaglianza $1 - x^2/2 \leq \cos x \leq 1 - x^2/4$ valida per $x \in [0, 1]$.