COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DI BASE

Prova scritta del 9 settembre 2010

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione sommabile secondo Lebesgue. Determinare condizioni su f sufficienti affinché esista il limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tanh\big(nf(x)\big)\, \mathrm{d}x.$$

Inoltre, nel caso le condizioni siano verificate calcolare tale limite in funzione di f giustificando la risposta alla luce della teoria.

Esercizio 2. Si consideri la forma differenziale $\omega : \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}^2)^*$ definita da

$$\omega(x,y) := 2xe^{x^2+y}\,\mathrm{d}x + e^{x^2+y}\,\mathrm{d}y.$$

Sia, inoltre, per ogni $R \in (1,+\infty)$, $\gamma_R : [0,R] \to \mathbb{R}^2$ il cammino definito da

$$\gamma_R(t) := \begin{cases} (t,0) & \text{se } \ t \in [0,1], \\ \left(\frac{\cos(t-1)}{t}, \frac{\sin(t-1)}{t}\right) & \text{se } \ t \in (1,R]. \end{cases}$$

Calcolare il

$$\lim_{R\nearrow+\infty} \int_{\gamma_R} \omega,$$

giustificando la risposta data.