

Esercizio 1. (a) Sia $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile (non necessariamente sommabile) secondo Lebesgue. Determinare il

$$\lim_{n \nearrow +\infty} \int_0^1 \sin^{2n}(f(x)) dx.$$

(b) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che esistano costanti strettamente positive a e b tali che $a \leq f'(x) \leq b$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$\lim_{n \nearrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^{2n}(f(x)) dx = +\infty \quad (1) \quad \boxed{\text{uno}}$$

(c) Sia ora $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che esista una costante strettamente positiva b tale che $0 \leq f'(x) \leq b$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. È ancora valida la proprietà (1)?

(d) Sia ora $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. È ancora valida la proprietà (1)?

Esercizio 2. Sia $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-x+n} \sin x.$$

Dimostrare che f è di classe C^∞ su $(0, +\infty)$.

Esercizio 3. Si consideri la famiglia di forme differenziali

$$\omega(x, y, z) = 2xyz dx + B(x, y, z) dy + C(x, y, z) dz.$$

(a) Determinare condizioni necessarie e sufficienti sulle funzioni B e C affinché ω sia esatta su tutto $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare B e C in modo tale che ω sia chiusa, ma non esatta, su $\mathbb{R}^3 \setminus \{z = 0\}$.

Esercizio 4. Sia data la successione di funzioni $f_n : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{1}{n^\alpha} \log n x e^{-\frac{x}{n}}.$$

(a) Determinare, al variare di $\alpha \in [0, +\infty)$, il limite puntuale della successione e stabilire se la convergenza è uniforme.

(b) Calcolare, al variare di $\alpha \in [0, +\infty)$, il

$$\lim \int_0^n f_n(x) dx$$

Esercizio 5. Sia $\{f_n\}$, $f_n : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, una successione di funzioni integrabili (non necessariamente sommabili) e non negative.

(a) È possibile scegliere $\{f_n\}$ in modo tale che $f_n \rightarrow +\infty$ puntualmente e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = 1 \quad ?$$

(b) È possibile scegliere $\{f_n\}$ in modo tale che $f_n \rightarrow +\infty$ puntualmente e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} f_n(x) dx = 1 \quad ?$$

(c) È possibile scegliere $\{f_n\}$ in modo tale che $f_n \rightarrow 0$ puntualmente e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = +\infty \quad ?$$

(d) È possibile scegliere $\{f_n\}$ in modo tale che $f_n \rightarrow 0$ puntualmente, $f_n(x)$ sia non crescente rispetto a n per ogni x in $(0, +\infty)$, e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} f_n(x) dx = +\infty \quad ?$$

Esercizio 6. Sia $\{f_n\}$, $f_n : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$f_n(x) = nx \sin\left(\frac{1}{nx}\right).$$

(a) Calcolare il limite puntuale della successione $\{f_n\}$ e stabilire se la convergenza è uniforme.

(b) Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} (1 - f_n(x)) dx$$

giustificando la risposta data.

Esercizio 7. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione non decrescente di classe C^1 .

(a) È possibile scegliere f in modo tale che sia

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) dx = +\infty \quad ?$$

(b) È possibile scegliere f in modo tale che sia

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) dx = 1 \quad ?$$

(c) Determinare condizioni sufficienti su f affinché il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) dx$$

sia finito.

(d) Sia ora data $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, non negativa e sommabile. Si ponga, per $\varepsilon > 0$,

$$g^\varepsilon(x) := \max \{ g(\xi) : \xi \in [x, x + \varepsilon] \}.$$

È vero che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} g^\varepsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx \quad ?$$