COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 18 gennaio 2011

Esercizio 1. Sia $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una successione qualsiasi.

(a) Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(x+n)} \sin(x + a_n).$$

Dimostrare che f è di classe C^∞ su $(0, +\infty)$.

(b) Sia ora $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(x+n)} \sin(a_n x).$$

È sempre vero che g è di classe C^∞ su $(0, +\infty)$?

Esercizio 2. Si consideri la famiglia di forme differenziali

$$\omega(x, y, z) = 2xyz \, \mathrm{d}x + B(x, y, z) \, \mathrm{d}y + C(x, y, z) \, \mathrm{d}z.$$

(a) Determinare condizioni necessarie e sufficienti sulle funzioni B e C affinché ω sia esatta su tutto $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare B e C in modo tale che ω sia chiusa, ma non esatta, su $\mathbb{R}^3 \setminus \{y = z = 0\}$.

Esercizio 3. Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile e non negativa e si ponga

$$L := \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^n f(n^2 x) \, \mathrm{d}x.$$

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false motivando la risposta data:

(a) Se f è sommabile su $(0, +\infty)$ allora L è finito.

(b) Se L è finito allora f è sommabile su $(0, +\infty)$.