

## COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 15 giugno 2011

**Esercizio 1.** Sia  $\{f_n\}$ ,  $f_n : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , una successione di funzioni integrabili (non necessariamente sommabili) e non negative.

(a) È possibile scegliere  $\{f_n\}$  in modo tale che  $f_n \rightarrow +\infty$  puntualmente e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = 1 \quad ?$$

(b) È possibile scegliere  $\{f_n\}$  in modo tale che  $f_n \rightarrow +\infty$  puntualmente e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} f_n(x) dx = 1 \quad ?$$

(c) È possibile scegliere  $\{f_n\}$  in modo tale che  $f_n \rightarrow 0$  puntualmente e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = +\infty \quad ?$$

(d) È possibile scegliere  $\{f_n\}$  in modo tale che  $f_n \rightarrow 0$  puntualmente,  $f_n(x)$  sia non crescente rispetto a  $n$  per ogni  $x$  in  $(0, +\infty)$ , e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} f_n(x) dx = +\infty \quad ?$$

**Esercizio 2.** Calcolare l'area della superficie  $S$  grafico della funzione di due variabili

$$f : \overline{B}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy^2,$$

dove  $\overline{B}(0, 1)$  è la bolla unitaria chiusa, ovvero  $\overline{B}(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .