

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta del 15 giugno 2011

Esercizio 1. Sia $\{f_n\}$, $f_n : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, una successione di funzioni integrabili (non necessariamente sommabili) e non negative.

(a) È possibile scegliere $\{f_n\}$ in modo tale che $f_n \rightarrow +\infty$ puntualmente e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = 1 \quad ?$$

(b) È possibile scegliere $\{f_n\}$ in modo tale che $f_n \rightarrow +\infty$ puntualmente e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} f_n(x) dx = 1 \quad ?$$

(c) È possibile scegliere $\{f_n\}$ in modo tale che $f_n \rightarrow 0$ puntualmente e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = +\infty \quad ?$$

(d) È possibile scegliere $\{f_n\}$ in modo tale che $f_n \rightarrow 0$ puntualmente, $f_n(x)$ sia non crescente rispetto a n per ogni x in $(0, +\infty)$, e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} f_n(x) dx = +\infty \quad ?$$

Esercizio 2. Calcolare l'area della superficie S grafico della funzione di due variabili

$$f : \overline{B}(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy^2,$$

dove $\overline{B}(0, 1)$ è la bolla unitaria chiusa, ovvero $\overline{B}(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.