

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA II

Prova scritta dell'11 febbraio 2011

Esercizio 1. (a) Sia $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile (non necessariamente sommabile) secondo Lebesgue. Determinare il

$$\lim_{n \nearrow +\infty} \int_0^1 \sin^{2n}(f(x)) \, dx.$$

(b) Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che esistano costanti strettamente positive a e b tali che $a \leq f'(x) \leq b$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$\lim_{n \nearrow +\infty} \int_0^{+\infty} \sin^{2n}(f(x)) \, dx = +\infty \quad (1)$$

(c) Sia ora $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che esista una costante strettamente positiva b tale che $0 \leq f'(x) \leq b$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. È ancora valida la proprietà (1)?

(d) Sia ora $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. È ancora valida la proprietà (1)?

Esercizio 2. Si consideri la famiglia di curve $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definita da

$$\gamma_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_n(t) = (te^{-nt} \cos t, te^{-nt} \sin t)$$

e sia $\ell(\gamma_n)$ la lunghezza di γ_n . Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell(\gamma_n),$$

giustificando la risposta data.