

Prova scritta di Istituzioni di Matematiche

23 FEBBRAIO 2006

!! Tempo a disposizione 2h e 30'.

Esercizio 1 (12 punti). Studiare la funzione

$$f(x) = (1 - x)e^{-x^2+2x}$$

discutendone campo d'esistenza, segno, limiti, eventuali asintoti, monotonia, massimi, minimi, concavità, convessità e flessi. Se ne tracci poi il grafico qualitativo.

◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻

Esercizio 2 (7 punti). Risolvere i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 3t^2x^2(t) \\ x(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x'(t) = 3t^2x^2(t) \\ x(0) = -1, \end{cases}$$

precisando il dominio di ciascuna soluzione.

◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻

Esercizio 3 (9 punti). Studiare il comportamento delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n^{3n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)^3 \sin\left(\frac{1}{(n+3)^5}\right), \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log(n-2)}{\log(1+2n)}.$$

◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻

Esercizio 4 (9 punti). Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2}{x}\right) dx, \quad \int x^{4x}(1 + \log x) dx, \quad \int 8x \cos(x^2 + 2) dx.$$
