

Prova scritta di Istituzioni di Matematiche

4 LUGLIO 2006

!! Tempo a disposizione 2h e 30'.

Esercizio 1 (12 punti). Studiare la funzione

$$f(x) = |x| - \log(x^2 + 1) - \arctan(|x|)$$

discutendone campo d'esistenza, segno, limiti, eventuali asintoti, monotonia, massimi, minimi, concavità, convessità e flessi (non è richiesta la determinazione esplicita degli zeri di f). Dire se f è derivabile in $x = 0$. Se ne tracci poi il grafico qualitativo.

◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻

Esercizio 2 (9 punti). Giustificare l'invertibilità della funzione

$$y = f(x) = \arctan\left(\frac{1 + x + x^2}{\sqrt{3}}\right), \quad x \geq 0.$$

Indicata quindi con $x = g(y)$ la sua funzione inversa, determinarne il dominio e lo spazio immagine. Calcolare infine $g'(\pi/3)$.

◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻

Esercizio 3 (6 punti). Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 4t + 8 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 2. \end{cases}$$

◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻

Esercizio 4 (6 punti). Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\alpha^n n},$$

determinare gli insiemi dei valori di $\alpha \neq 0$ tali per cui la serie rispettivamente converge assolutamente, converge semplicemente, diverge, oscilla.

◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻

Esercizio 5 (6 punti). Calcolare

$$D \arctan(1 - x^2), \quad \int \frac{x}{1 + (1 - x^2)^2} dx$$

e

$$D10^{x^3+x}, \quad \int (3x^2 + 1)10^{x^3+x} dx.$$