

Prova scritta di Istituzioni di Matematiche

9 FEBBRAIO 2006

!! Tempo a disposizione 2h e 30'.

Esercizio 1 (12 punti). Studiare la funzione

$$f(x) = \log((x+1)^2) - x$$

discutendone campo d'esistenza, limiti, eventuali asintoti, monotonia, massimi, minimi, concavità, convessità e flessi. Se ne tracci poi il grafico qualitativo.

Calcolare inoltre l'area della regione piana delimitata dal grafico della funzione e dall'asse x e posta a sinistra della retta $x = 1$.

◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻

Esercizio 2 (8 punti). Determinare il parametro α in modo tale che la funzione

$$y(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x-1}\right) & \forall x > 1, \\ x - \alpha & \forall x \leq 1 \end{cases}$$

sia continua in tutto \mathbb{R} . Determinare lo spazio immagine I della funzione $y(x)$ ottenuta. Tale funzione $y: \mathbb{R} \rightarrow I$ è invertibile? Inoltre, y è derivabile in tutto \mathbb{R} ?

◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻

Esercizio 3 (9 punti). Date le seguenti funzioni, calcolare $f'(0)$:

$$f(x) = \frac{(x+4)(e^{4x} + 1)}{x^4 + 1}, \quad f(x) = \exp\left(\frac{1}{1 + \log(1 + 3x)}\right),$$

$$f(x) = \sqrt{2} \sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) \int_{-1}^x (4t + 1) dt.$$

◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻

Esercizio 4 (9 punti). Calcolare il limite per $n \rightarrow \infty$ delle seguenti successioni:

$$a_n = n^2 \sin^3 \frac{1}{n}, \quad a_n = \sum_{k=2}^n (\log k^2) \log\left(1 + \frac{1}{k}\right), \quad a_n = \frac{3^n}{\log(3^n - 1)}.$$