

Prova scritta di Istituzioni di Matematiche

20 SETTEMBRE 2005

!! Tempo a disposizione 2h e 30'.

Esercizio 1 (12 punti). Studiare la funzione

$$y(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = 0, \\ \frac{x^2}{2}(6 - 4 \log |x|) + 2 & \text{se } x \neq 0, \end{cases}$$

discutendone campo d'esistenza, *proprietà di simmetria*, numero di intersezioni con gli assi, limiti, eventuali asintoti, monotonia, massimi, minimi, concavità, convessità e flessi. Se ne tracci poi il grafico qualitativo. *Non è richiesta* la determinazione precisa degli zeri di $y(x)$.

◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻

Esercizio 2 (9 punti). Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + \log(1 + x^{4/3})}{\sin 3x + x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{4}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + x}{e^x + \cos x},$$

◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻

Esercizio 3 (7 punti). Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{-y + \arctan t}{t^2 + 1}, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻ ◻

Esercizio 4 (8 punti). Determinare il carattere delle seguenti serie al variare del parametro α nell'intervallo indicato:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \left[\sin \frac{1}{n} \right]^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin \alpha)^n}{n}, \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$