

Prova scritta di Istituzioni di Matematiche

5 LUGLIO 2005

!! Tempo a disposizione 2h e 30'.

Esercizio 1 (12 punti). Studiare la funzione

$$y(x) = \log |x^2 + x|$$

discutendone campo d'esistenza, segno, limiti, eventuali asintoti, monotonia, massimi, minimi, concavità, convessità e flessi. Se ne tracci poi il grafico qualitativo.

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

Esercizio 2 (10 punti). Dire se le seguenti funzioni sono continue in $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \exp(2(x+1) + 3(\cos x)) & \text{se } x \leq 0, \\ (x+1)^{\frac{5}{\sin x}} & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \int_{-1}^x (t^2 - 2) dt & \text{se } x \leq 0, \\ \int_1^x \frac{3}{t^{1/4}} dt & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

Esercizio 3 (6 punti). Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \left(\frac{2t}{3} + 1\right) \cos^2(3y), \\ y(0) = \frac{\pi}{12}. \end{cases}$$

□ □ □ □ □ □ □ □ □ □

Esercizio 4 (9 punti). Calcolare il limite per $n \rightarrow \infty$ delle seguenti successioni:

$$a_n = \frac{n^2}{3} \left(1 - \cos \frac{3}{n}\right), \quad a_n = \sum_{k=1}^{n^3} \left(1 - \frac{3}{k}\right),$$

$$a_n = e^{-3n^2+2n} \left(\frac{1 + e^{2n^2+n}}{e^{-n^2+2n}}\right).$$