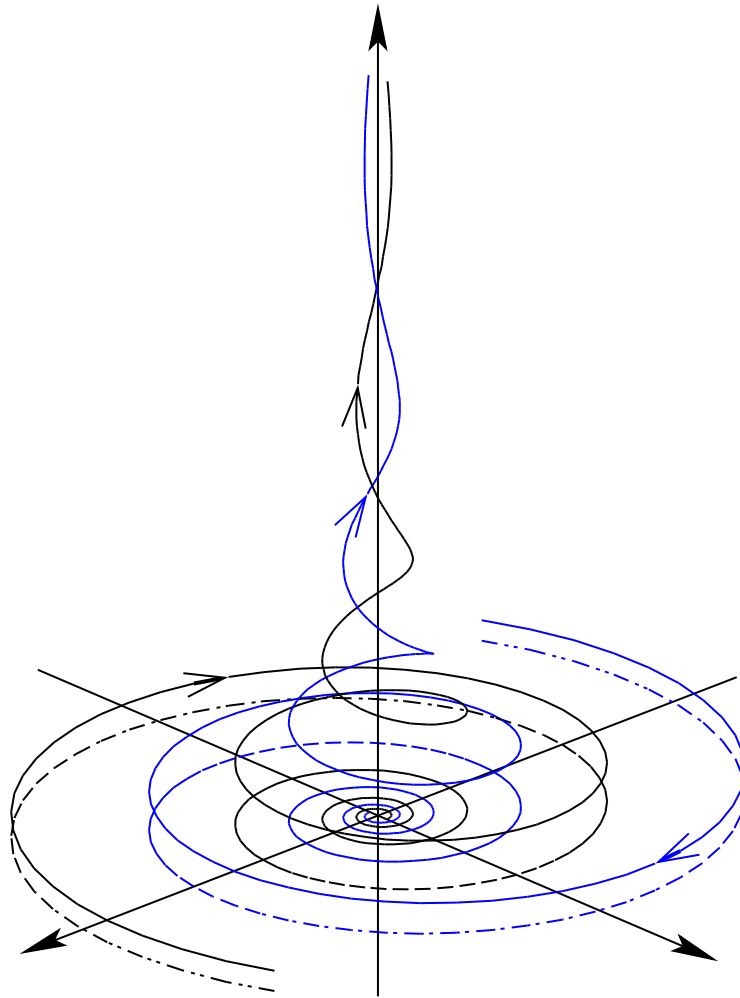


Enrico Vitali  
Università degli Studi di Pavia

*Lezioni introduttive sulle equazioni  
differenziali ordinarie*



A.A. 2013/2014



Quelle che seguono sono alcune note della parte relativa all'argomento "Equazioni differenziali" dell'insegnamento di ANALISI MATEMATICA 3 tenuto negli anni scorsi per il Corso di laurea in Matematica e per il Corso di laurea in Fisica dell'Università degli Studi di Pavia.

Vorrebbero essere un punto di partenza per lo studio delle opere classiche espressamente dedicate a questi argomenti e citate, in parte, in bibliografia.

Si ringraziano fin d'ora quanti (penso in particolare agli studenti del corso) segnaleranno errori, proporranno suggerimenti, avvanzeranno commenti, . . .

E.V.

Pavia, settembre 2014



# Indice

<b>1</b>	<b>Esempi introduttivi</b>	<b>1</b>
1.1	Modelli di crescita per una singola popolazione	1
1.2	Cinetica chimica	4
1.2.1	Ordine di una reazione e modello differenziale	4
1.2.2	Datazione mediante radiocarbonio	6
1.3	Oscillatore armonico	7
1.4	Circuiti elettrici	8
1.5	Specie in competizione: sistemi non lineari	11
1.6	Pendolo semplice	12
1.7	Equazione di Schrödinger	14
1.8	Elastiche piane; un esempio di problemi ai limiti	16
1.9	Equazioni in forma normale.	18
<b>2</b>	<b>Problemi ai valori iniziali per sistemi del primo ordine</b>	<b>23</b>
2.1	Risultati di esistenza ed unicità	23
2.2	Prolungamento delle soluzioni	29
2.3	Lemma di Gronwall	33
2.4	Disuguaglianze differenziali	36
2.5	Dipendenza delle soluzioni dai dati	39
2.6	Sistemi autonomi: generalità	44

<b>3</b>	<b>Tecniche elementari di integrazione</b>	<b>49</b>
3.1	Equazioni a variabili separabili	49
3.2	Equazioni lineari del primo ordine	50
3.3	Equazioni di Bernoulli; equazione di Riccati	52
3.4	Equazioni di tipo omogeneo	53
3.5	Equazioni del tipo $F(y, y') = 0$ e del tipo $F(x, y') = 0$	54
3.6	Equazione di Clairaut	58
3.7	Equazioni differenziali e forme differenziali	59
	Appendice A: equazione di Eulero di un funzionale	65
	Appendice B: forme differenziali lineari	68
<b>4</b>	<b>Equazioni e sistemi differenziali lineari</b>	<b>73</b>
4.1	Equazione omogenea. Matrice risolvente	74
4.2	Equazione completa. Variazione delle costanti	77
4.3	Esponenziale di una matrice	79
4.4	Sistemi omogenei autonomi	82
4.5	Calcolo della matrice esponenziale	84
4.5.1	Matrice diagonalizzabile	85
4.5.2	Caso generale	87
4.5.3	Soluzioni reali	92
4.6	Equazioni scalari lineari di ordine superiore	99
4.7	Equazioni a coefficienti costanti	101
4.8	Sistemi omogenei autonomi: il caso bidimensionale	105
	Appendice: rappresentazione di operatori lineari	111
<b>5</b>	<b>Comportamento asintotico. Stabilità</b>	<b>121</b>
5.1	Stabilità dei punti di equilibrio	121
5.2	Comportamento asintotico dei sistemi lineari	122
5.3	Stabilità linearizzata	126
5.4	Funzioni di Liapunov	132
<b>6</b>	<b>Equazioni della Fisica Matematica</b>	<b>137</b>
6.1	Equazione di Laplace su di un rettangolo	138
6.2	Equazione di Hermite	140
6.3	Equazione di Bessel	142
6.4	Oscillatore armonico quantistico	144
6.5	Modi normali di vibrazione per una membrana circolare	145
	Bibliografia	149
	Indice analitico	151

# Capitolo 1

## ESEMPI INTRODUTTIVI

Le equazioni differenziali costituiscono uno degli strumenti più utilizzati nella fase di modellizzazione matematica quantitativa di un ‘fenomeno’, inteso nel senso ampio del termine: fenomeni fisico-naturali (come la dinamica di un sistema meccanico, la variazione spaziale del potenziale corrispondente a una data distribuzione di cariche o l’evoluzione nel tempo di una popolazione, . . .), fenomeni economico-sociali (dinamica di grandezze macroeconomiche come produzione, capitale e lavoro in un sistema economico, . . .), ecc.

In questo capitolo presentiamo alcuni esempi, tratti da contesti differenti, con lo scopo sia di mettere in luce l’importanza delle equazioni differenziali in fase modellistica, sia di illustrare le peculiarità rilevanti delle varie tipologie di equazioni (lineari, non lineari, autonome, . . .) e i primi concetti basilari.

### 1.1 MODELLI DI CRESCITA PER UNA SINGOLA POPOLAZIONE

Si consideri una ‘popolazione’, intesa in senso lato: un agglomerato di entità di qualunque genere (batteri, esseri umani, nuclei radioattivi, . . .) la cui consistenza complessiva varia nel tempo. Supponiamo di poter misurare quantitativamente la popolazione in modo ‘continuo’ (la variazione di una singola unità sia trascurabile sul totale della popolazione).

Se  $x(t)$  misura l’entità della popolazione all’istante di tempo  $t$ , il valore

$$\frac{x'(t)}{x(t)}$$

è il *tasso di variazione* di  $x$ : esso dà la rapidità di variazione di  $x$  rispetto al tempo rapportata al totale della popolazione (cioè ‘per unità di popolazione’). Una situazione che, come vedremo fra poco, si verifica in numerosi casi è quella in cui il tasso di variazione dipende dalla popolazione stessa ed eventualmente dal tempo, cioè:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = r(t, x(t)),$$

o anche

$$x'(t) = r(t, x(t))x(t). \quad (1.1)$$

Questa relazione esprime la legge di evoluzione di  $x$ . Si tratta di una *equazione differenziale*: un’equazione in cui l’incognita è una funzione (la  $x$ ) e compare almeno una derivata della funzione stessa.

Qui l'ordine massimo di derivazione che compare è 1, per cui abbiamo un'equazione differenziale del *primo ordine*.

Assegnato il tasso  $r$  come funzione di  $t$  e di  $x$ , ci aspettiamo che la legge di evoluzione (1.1) specifichi completamente la funzione  $x$  se è noto, ad esempio, il valore assunto in un istante  $t_0$  di riferimento:

$$x(t_0) = x_0 \quad (\text{valore noto}).$$

Spesso  $t_0 = 0$  (istante iniziale dell'esperimento o dell'intervallo di rilevazione dei dati, ecc.): ci si riferisce pertanto alla condizione  $x(t_0) = x_0$  come *condizione iniziale* per l'equazione (1.1). Il problema:

$$\begin{cases} x' = r(t, x)x \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

è detto *problema ai valori iniziali* o *problema di Cauchy* per l'equazione (1.1).

Per soluzione dell'equazione (1.1) intendiamo una qualunque funzione  $x$  di classe  $C^1$  su un intervallo  $J$  per la quale

$$x'(t) = r(t, x(t))x(t) \quad \text{per ogni } t \in J.$$

Se  $t_0 \in J$  e  $x(t_0) = x_0$  allora  $x$  è soluzione di (1.2).

Vediamo alcuni esempi.

a) *Tasso costante di variazione.*

Il modello di crescita di una popolazione in cui il tasso di variazione è assunto costante è legato al nome di THOMAS ROBERT MALTHUS (1766–1834), demografo ed economista politico inglese.<sup>1</sup> L'equazione (1.1) diventa:

$$x' = rx. \quad (1.3)$$

Osserviamo innanzitutto che vi è la soluzione costante  $x \equiv 0$ . Sia  $x: J \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $J$  intervallo, una soluzione di classe  $C^1$  (si noti che se  $x$  è una soluzione differenziabile allora è automaticamente  $C^1$ , dovendo sussistere l'uguaglianza  $x' = rx$ ). In ogni sottointervallo di  $J$  in cui  $x$  non si annulla, l'uguaglianza  $x' = rx$  equivale a:

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = rt,$$

che possiamo anche scrivere come:

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \log |x(t)| = rt + c,$$

oppure:

$$\exists C > 0 \quad |x(t)| = Ce^{rt}.$$

Se inglobiamo il segno di  $x$  nella costante otteniamo infine:

$$\exists C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad x(t) = Ce^{rt}.$$

Pertanto ogni soluzione, dove non nulla, deve essere un'esponenziale  $Ce^{rt}$ , per una qualche costante  $C$ . Ne segue che ogni soluzione, se diversa dalla soluzione nulla, non si annulla mai ed è un'esponenziale di questo tipo. Concludiamo che la famiglia delle soluzioni della (1.3) è data da:

$$t \mapsto Ce^{rt}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

<sup>1</sup>Malthus enunciò per la prima volta le sue teorie sull'evoluzione della popolazione nel saggio anonimo *An essay on the principle of population as it affects the future improvement of society* nel 1798, ripubblicato successivamente più volte a proprio nome in forma ampliata. Sulla base dei dati demografici dei coloni inglesi nordamericani, Malthus sostenne che in condizione di fecondità naturale la popolazione tende a raddoppiare a ogni generazione (circa 25 anni). Questa dinamica può essere espressa tramite una crescita esponenziale come in (1.4): si calcoli il valore di  $r$  se  $y$  raddoppia ogni 25 anni.



Se  $x(t) = Ce^{rt}$  è una soluzione della (1.3), il valore  $C$  non è altro che  $x(0)$ , per cui possiamo scrivere, più espressivamente:

$$x(t) = x(0)e^{rt}; \quad (1.4)$$

a partire dal dato iniziale  $x(0)$  l'evoluzione è di tipo esponenziale. Nel caso in cui  $r < 0$  abbiamo una decrescita esponenziale.

OSSERVAZIONE 1.1.1 Per meglio inquadrare le equazioni che incontreremo in questo capitolo, conviene notare subito che l'equazione (1.3), che possiamo anche scrivere come  $x' - rx = 0$ , rientra fra le equazioni differenziali *lineari del primo ordine a coefficienti costanti*: l'operatore differenziale  $x \mapsto x' - rx$  è infatti lineare, coinvolge solo il primo ordine di derivazione e presenta ogni termine  $x^{(k)}$  (derivata kima, con  $k = 0, 1$ ) con coefficienti costanti.

b) *Equazione logistica*. In un ambiente naturale la crescita può essere inibita da fattori il cui effetto è sempre più considerevole col crescere della popolazione: si pensi all'esaurimento delle risorse alimentari disponibili, alla quantità di rifiuti tossici prodotti, all'affollamento fisico, ecc. In tal caso non è più ragionevole ammettere un tasso costante di crescita. Una possibile correzione al modello di crescita malthusiano fu proposta da PIERRE FRANÇOIS VERHULST (matematico belga, 1804–1849) assumendo l'esistenza di una *capacità di carico* (o portante) dell'ambiente, cioè di un livello  $K$  della popolazione oltre al quale il tasso di crescita diventa negativo.<sup>2</sup>

Il più semplice modello che realizza ciò è una dipendenza lineare del tasso di crescita dalla popolazione:

$$\frac{x'}{x} = r\left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (1.5)$$

Procediamo in modo analogo a quanto abbiamo fatto per la (1.3). Chiaramente le funzioni costanti con valore 0 o  $K$  sono soluzioni. Se poi  $x$  è una soluzione che, su un intervallo  $J$  non assume mai i valori 0 e  $K$ , allora in  $J$  deve essere:

$$\frac{x'}{x(1 - x/K)} = r$$

cioè, per integrazione:

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \log\left|\frac{x}{K-x}\right| = rt + c$$

o anche:

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad x(t) = K \frac{Ce^{rt}}{1 + Ce^{rt}} = K\left(1 - \frac{1}{1 + Ce^{rt}}\right) \quad (1.6)$$

(per  $C = 0$  si recupera la soluzione nulla, per ' $C = \infty$ ' la soluzione costante di valore  $K$ ; queste si scambiano ponendo  $C' = 1/C$ ). Come per l'equazione (1.3), non è difficile vedere che queste esauriscono le soluzioni di (1.5).

Consideriamo, in particolare, il caso  $0 < x(0) < K$  e  $r > 0$ : si ottiene (posto  $x_0 = x(0)$ )

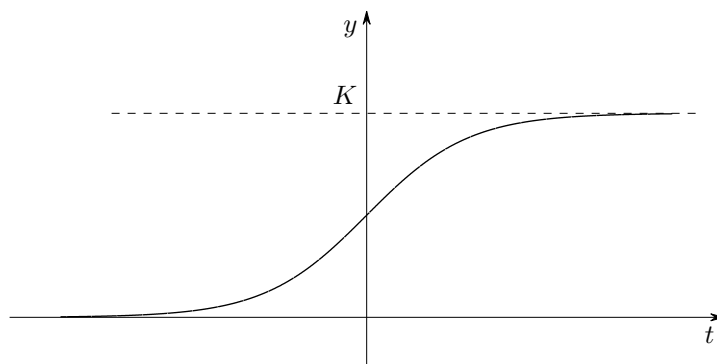
$$C = \frac{x_0}{K - x_0} > 0.$$

Se scriviamo  $C$  nella forma  $C = e^{-rt_0}$  (come è sempre possibile per un opportuno valore  $t_0 \in \mathbb{R}$ ) si nota che le soluzioni sono traslate temporali l'una dell'altra:

$$x(t) = K \frac{e^{r(t-t_0)}}{1 + e^{r(t-t_0)}}.$$

È sufficiente pertanto studiare il caso  $t_0 = 0$  (vedi Figura 1.1). Coerentemente con l'interpretazione modellistica considerata,  $K$  è il valore su cui si stabilizza asintoticamente il valore  $x$  della popolazione.

<sup>2</sup>Al nome di Verhulst vanno associati anche quelli dei demografi americani R. Pearl e L.J. Reed, che negli anni '20 del secolo scorso riscopersero le memorie pubblicate da Verhulst negli anni attorno al 1840 e a lungo dimenticate.


 Figura 1.1 - Curva logistica ( $Ke^{rt}/(1 + e^{rt})$ , con  $r > 0$ ).

## 1.2 CINETICA CHIMICA

La cinetica chimica studia i meccanismi che portano alle condizioni di equilibrio termodinamico per una data reazione. Come vedremo, le stesse equazioni (1.3) e (1.5) nascono come modelli naturali anche in questo campo: la ‘popolazione’ in oggetto è ora una specie chimica.

### 1.2.1 Ordine di una reazione e modello differenziale

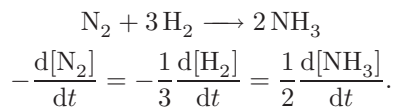
Consideriamo una generica reazione chimica del tipo



Mettiamoci nell’ipotesi che la reazione sia omogenea (cioè avvenga tra specie all’interno della stessa fase (solida, liquida o gassosa)); supponiamo inoltre che si svolga a volume e a temperatura costanti.<sup>3</sup> Come misura della velocità di reazione possiamo assumere l’aumento della concentrazione di uno dei prodotti o la diminuzione di uno dei reagenti per unità di tempo:

$$v = -\frac{1}{a} \frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b} \frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{c} \frac{d[C]}{dt} = \frac{1}{d} \frac{d[D]}{dt}.$$

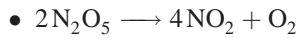
I coefficienti stechiometrici che compaiono tengono conto del fatto che le velocità di variazione delle varie specie sono legate fra loro. Ad esempio:



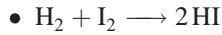
La legge, detta *legge cinetica*, secondo cui evolve una reazione è determinata sperimentalmente. È molto comune il caso in cui la velocità di reazione è proporzionale alla concentrazione di uno o due dei reagenti, ciascuna elevata ad un esponente intero, generalmente piccolo: la somma di tali esponenti è detta *ordine della reazione*.<sup>4</sup> Ad esempio:

<sup>3</sup>altrimenti conviene definire la velocità di reazione come la variazione, nell’unità di tempo, del numero di moli della specie considerata per unità di volume.

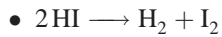
<sup>4</sup>In realtà molte reazioni sono costituite da diversi stadi o processi elementari; l’ordine della reazione è individuato dallo stadio più lento. Ad esempio  $2\text{N}_2\text{O}_5 \longrightarrow 4\text{NO}_2 + \text{O}_2$  si scompone in  $\text{N}_2\text{O}_5 \longrightarrow \text{NO}_3 + \text{NO}_2$  (lento; 1° ordine) e  $2\text{NO}_3 \longrightarrow 2\text{NO}_2 + \text{O}_2$  (veloce).



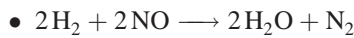
$$v = k[\text{N}_2\text{O}_5] \quad \text{reazione del 1° ordine}$$



$$v = k[\text{H}_2][\text{I}_2] \quad \text{reazione del 2° ordine} \\ \text{(1° ordine rispetto a ciascun reagente)}$$



$$v = k[\text{HI}]^2 \quad \text{reazione del 2° ordine}$$



$$v = k[\text{H}_2][\text{NO}]^2 \quad \text{reazione del 3° ordine}$$

In una reazione del primo ordine la velocità di variazione della concentrazione  $[A]_t$  di un reagente, al tempo  $t$ , è proporzionale alla concentrazione stessa; quindi

$$-\frac{d[A]_t}{dt} = k[A]_t,$$

con  $k$  opportuna costante positiva dipendente dalla reazione in questione. Posto  $x(t) = [A]_t$  si ottiene l'equazione

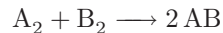
$$x' = -kx, \quad (1.7)$$

cioè la (1.3).

Consideriamo ora le reazioni del secondo ordine. Supponiamo che la legge cinetica sia del tipo:

$$v = k[A]_t[B]_t, \quad (1.8)$$

con la stechiometria data da



(una molecola  $\text{A}_2$  formata da due atomi A e una molecola  $\text{B}_2$  formata da due atomi B si combinano dando luogo a due molecole del composto AB; un esempio è  $\text{H}_2 + \text{I}_2 \longrightarrow 2\text{HI}$ ). Posto

$$x(t) = [\text{AB}]_t,$$

poiché ogni coppia  $\text{A}_2, \text{B}_2$  produce due molecole di AB (cioè  $\frac{1}{2}d[\text{AB}]/dt = -d[\text{A}_2]/dt = -d[\text{B}_2]/dt$ ), abbiamo (supponendo  $[\text{AB}]_0 = 0$ )

$$[\text{A}_2]_t = [\text{A}_2]_0 - \frac{1}{2}x(t), \quad [\text{B}_2]_t = [\text{B}_2]_0 - \frac{1}{2}x(t).$$

Pertanto dall'equazione cinetica ricaviamo:

$$x' = k([\text{A}_2]_0 - \frac{1}{2}x(t))([\text{B}_2]_0 - \frac{1}{2}x(t)). \quad (1.9)$$

Questa è della forma:

$$x' = \alpha(\beta - x)(\gamma - x),$$

con  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  parametri dati. Mediante il cambiamento di variabile  $\beta - x = z$  si ottiene:

$$z' = \alpha z[(\beta - \gamma) - z]. \quad (1.10)$$

Per  $\beta \neq \gamma$  l'equazione è della stessa tipologia della (1.5).

Se in (1.8) si ha  $[B]_t \sim [B]_0$  (ad esempio se uno dei reagenti è il solvente (presente in forte eccesso rispetto al soluto)), allora la reazione diventa sostanzialmente del primo ordine.

Per una reazione del secondo ordine che segue una legge del tipo

$$-\frac{d[A]_t}{dt} = k[A]_t^2,$$

(ad esempio  $2\text{HI} \longrightarrow \text{H}_2 + \text{I}_2$ ) si ottiene l'equazione

$$x' = -kx^2. \quad (1.11)$$

Questa rientra ancora nella tipologia (1.10), con  $\beta = \gamma$ . Come è facile vedere la famiglia delle soluzioni di (1.11) è:

$$t \mapsto \frac{1/k}{t - \alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

## 1.2.2 Datazione mediante radiocarbonio

Dal punto di vista matematico il modello cinetico delle reazioni del primo ordine è alla base del ben noto metodo di datazione mediante radiocarbonio.

L'isotopo radioattivo  $^{14}\text{C}$  del carbonio (o *radiocarbonio*) ha origine dalla trasformazione dell'azoto  $^{14}\text{N}$  negli strati alti dell'atmosfera mediante cattura di neutroni. Gli organismi viventi scambiano continuamente carbonio con l'atmosfera attraverso processi di respirazione (animali) o di fotosintesi (vegetali), oppure lo assimilano nutrendosi di altri esseri viventi o sostanze organiche. Finché l'organismo è vivo la concentrazione di  $^{14}\text{C}$  risultante nell'organismo rispetto a quella dell'isotopo stabile  $^{12}\text{C}$  si mantiene costante e uguale a quella che si riscontra nell'atmosfera (attualmente 1 su  $10^{12}$ ). Alla morte dell'organismo, il radiocarbonio continua a decadere<sup>5</sup> senza venire rimpiazzato: cambia quindi il rapporto tra  $^{14}\text{C}$  e  $^{12}\text{C}$ ; la misura di tale rapporto permette di stimare il tempo trascorso dalla morte dell'organismo. Qualitativamente, questo è il principio su cui si basa il metodo di datazione mediante radiocarbonio proposto nel 1949 da W. F. Libby (che ottenne, per questo contributo, il premio Nobel per la Chimica nel 1960).

Poichè, come è sperimentalmente verificato, il decadimento radioattivo segue la stessa legge (1.7) già vista per le reazioni del primo ordine, se  $x(t)$  indica la quantità di materiale radioattivo (nel nostro caso  $^{14}\text{C}$ ) presente al tempo  $t$ , allora

$$x(t) = x(0)e^{-kt},$$

dove  $k$  è costante e caratteristica dell'elemento considerato. Spesso  $k$  viene determinata mediante il *tempo di dimezzamento*: infatti se  $T_{1/2}$  è tale che  $x(T_{1/2}) = x(0)/2$ , allora deve essere:

$$x(0)/2 = x(0)e^{-kT_{1/2}},$$

da cui

$$k = \frac{\log 2}{T_{1/2}}.$$

Sperimentalmente si determina  $T_{1/2}$ , che per il radiocarbonio è circa

$$T_{1/2} \sim 5730 \text{ anni, quindi } k^{-1} \sim 8267 \text{ anni.}$$

Se  $p \in (0, 1)$  è la percentuale di  $^{14}\text{C}$  residua, rispetto alla percentuale iniziale, rilevata in un reperto, ne possiamo stimare l'età  $t$  mediante:

$$t = -\frac{\log p}{k}.$$

<sup>5</sup>mediante decadimento  $\beta^-$ , trasformandosi in  $^{14}\text{N}$ :  $^{14}_6\text{C} \longrightarrow ^{14}_7\text{N} + e^- + \text{antineutrino}$ .

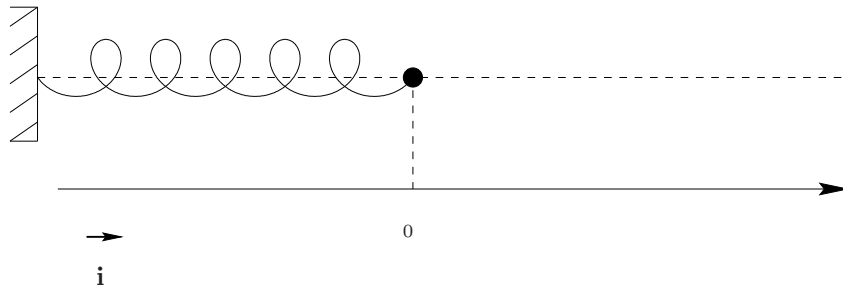


Figura 1.2 - Oscillatore armonico: posizione di equilibrio.

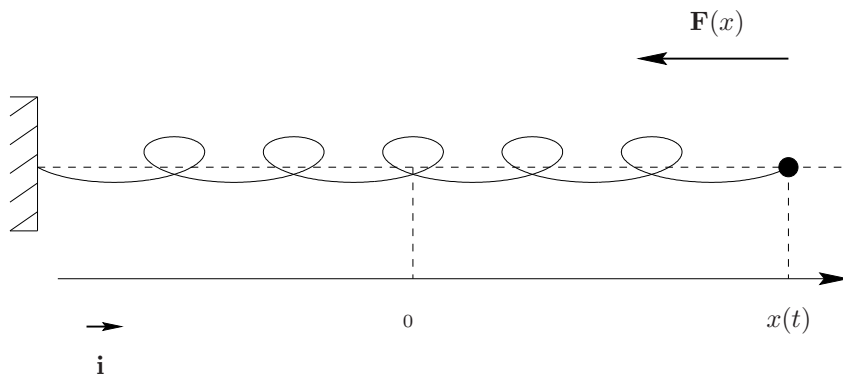


Figura 1.3 - Oscillatore armonico: forza di richiamo.

Se il metodo di datazione mediante  $^{14}\text{C}$  è semplice in linea di principio, l'applicazione pratica è tuttavia molto delicata<sup>6</sup> (infiltrazioni spurie di  $^{12}\text{C}$  o  $^{14}\text{C}$  nel reperto, variazione nel tempo della proporzione fra  $^{12}\text{C}$  e  $^{14}\text{C}$ , ecc.).

### 1.3 OSCILLATORE ARMONICO

Un esempio classico che porta a una semplice equazione differenziale *lineare del secondo ordine a coefficienti costanti* (questo tipo di equazioni verrà studiato nel § 4.7) si ottiene considerando il moto di un punto materiale  $P$  di massa  $m$  vincolato a scorrere senza attrito su di una retta sotto l'azione di una forza elastica; quest'ultima può essere pensata realizzata mediante una molla come in Figura 1.2.

Si supponga che l'origine del sistema di riferimento coincida con la posizione in cui la lunghezza della molla è quella a riposo. La forza di richiamo  $\mathbf{F}(x)$  esercitata dalla molla quando il punto  $P$  si trova nella posizione di ascissa  $x$ , secondo la legge di Hooke è:

$$\mathbf{F}(x) = -kx\mathbf{i},$$

<sup>6</sup>A titolo di esempio si veda al riguardo l'articolo [14].

dove  $\mathbf{i}$  indica il versore dell'asse di riferimento e  $k$  la costante elastica della molla. Se  $x = x(t)$  indica la legge oraria del punto  $P$ , la seconda legge della dinamica dà<sup>7</sup>:

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t),$$

da cui

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad \text{dove } \omega^2 = k/m. \quad (1.12)$$

Si tratta di un'equazione differenziale *lineare del secondo ordine a coefficienti costanti* (si ricordi l'Osservazione 1.1.1): l'operatore differenziale  $x \mapsto \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t)$  è lineare e l'ordine massimo di derivazione coinvolto è il secondo; inoltre i coefficienti di  $x^{(k)}$  (derivate  $k$ -ime, con  $k = 0, 1$ ) sono costanti (rispetto al tempo).

Le soluzioni di (1.12) sono date da (si veda § 4.7):

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t, \quad (1.13)$$

al variare di  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  (la verifica che si tratta di soluzioni può, peraltro, essere svolta direttamente). Una forma più espressiva della famiglia delle soluzioni si ottiene mettendo in evidenza l'ampiezza  $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$  delle oscillazioni:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \left( \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \cos \omega t + \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \sin \omega t \right) \\ &= A (\cos \varphi \cos \omega t + \sin \varphi \sin \omega t), \end{aligned}$$

dove  $\varphi$  è tale che  $(\cos \varphi, \sin \varphi) = (c_1/A, c_2/A)$ . Le soluzioni possono allora essere espresse come:

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi), \quad \text{al variare di } A \geq 0 \text{ e } \varphi \in \mathbb{R}. \quad (1.14)$$

Dalla (1.14) risulta evidente l'oscillazione sinusoidale del punto  $P$  attorno alla posizione di ascissa nulla, con periodo  $2\pi/\omega$  (*moto armonico*); risulta altresì evidente che si può ottenere un moto armonico mediante proiezione di un moto circolare uniforme su un diametro della traiettoria.

Come è noto dalla Fisica, la conoscenza della posizione  $x(t_0)$  e della velocità  $\dot{x}(t_0)$  in un istante  $t_0$  determina univocamente il moto del punto a ogni istante di tempo (precedente o successivo a  $t_0$ ). Analiticamente ciò corrisponde al fatto che il problema

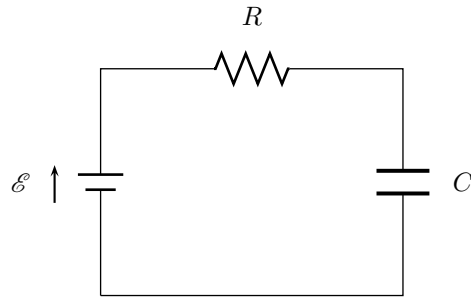
$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \\ x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0, \end{cases} \quad (1.15)$$

con  $x_0$  e  $v_0$  assegnati, ammette una e una sola soluzione (cioè risultano univocamente individuate le costanti  $A$  e  $\varphi$  in (1.14) o  $c_1$  e  $c_2$  in (1.13)). Il problema (1.15) è un *problema ai valori iniziali*, o *problema di Cauchy*, per un'equazione del secondo ordine, analogamente al problema (1.2) già incontrato per un'equazione del primo ordine.

## 1.4 CIRCUITI ELETTRICI

Vediamo alcune semplici equazioni e sistemi di equazioni differenziali che intervengono nello studio dei circuiti elettrici elementari. In particolare il fenomeno della mutua induzione fra circuiti  $RL$  fornirà un esempio della fondamentale famiglia dei sistemi differenziali *lineari*.

<sup>7</sup>In un contesto fisico-matematico, nel caso in cui la variabile di derivazione rappresenti il tempo, utilizzeremo spesso la tipica 'notazione puntata' per indicare la derivata di una grandezza.


 Figura 1.4 - Circuito  $RC$ 

### Circuiti $RC$ .

Consideriamo un circuito in cui è presente un generatore di forza elettromotrice  $\mathcal{E}$ , un resistore di resistenza  $R$  e un condensatore di capacità  $C$ .<sup>8</sup> (vedi Figura 1.4). Sia  $q(t)$  la carica del condensatore all'istante  $t$ ; l'intensità di corrente nel circuito è  $i = dq/dt$ . A partire da un qualunque punto del circuito la somma algebrica delle variazioni di potenziale rilevate in un giro completo lungo il circuito stesso è nulla (seconda legge di Kirchhoff). Procedendo nel verso della corrente si osserva un aumento di potenziale  $\mathcal{E}$  attraversando il generatore di f.e.m., una diminuzione di potenziale  $iR$  attraversando il resistore (legge di Ohm) e una diminuzione  $q/C$  corrispondente al condensatore. Ciò si traduce nell'equazione

$$\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0;$$

poiché  $i = dq/dt$  ricaviamo

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}. \quad (1.16)$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine *non omogenea*: rispetto alla (1.3), scritta anche come  $y' - ry = 0$ , l'operatore differenziale del primo ordine è ora uguagliato ad un funzione data (qui la costante  $\mathcal{E}$ ). La soluzione corrispondente al dato iniziale  $q(0) = 0$  si verifica essere (rimandiamo al § 3.2 per la tecnica risolutiva):

$$q(t) = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}).$$

### Circuiti $RL$ .

Consideriamo ora il caso in cui, in luogo del condensatore, nel circuito precedente sia presente un induttore di induttanza  $L$  (vedi Figura 1.5). Questo componente del circuito dà luogo a una f.e.m.  $\mathcal{E}_L$  tra i capi dell'induttore che si oppone alla variazione di corrente e che è proporzionale alla velocità di variazione della corrente. La costante di proporzionalità è l'*induttanza*  $L$ :

$$\mathcal{E}_L = L \frac{di}{dt}.$$

Come per il circuito  $RC$  studiato prima, la legge di Kirchhoff dà:

$$\mathcal{E} - iR - \mathcal{E}_L = 0,$$

<sup>8</sup> In un condensatore è costante il rapporto fra carica presente sulle armature e differenza di potenziale fra di esse: tale costante è detta *capacità* del condensatore.

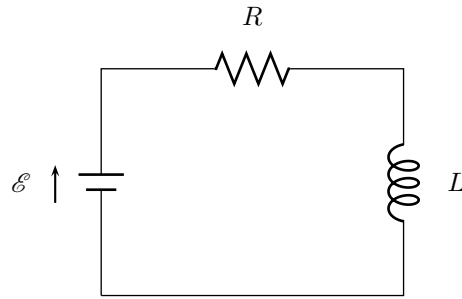


Figura 1.5 - Circuito  $RL$

ovvero

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \mathcal{E}. \quad (1.17)$$

A prescindere dal significato delle grandezze in gioco questa equazione non è altro che la (1.16). Pertanto abbiamo la soluzione:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}),$$

nel caso di corrente iniziale nulla.

*Circuiti RLC.*

Nel caso più generale in cui sia presente sia un resistore che un induttore e un condensatore, la legge di Kirchhoff dà ( $i = dq/dt$ ):

$$\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} - \mathcal{E}_L = 0,$$

da cui:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = \mathcal{E}. \quad (1.18)$$

Questa è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti, *non omogenea*: analogamente a quanto detto per la (1.16) rispetto alla (1.3), l'operatore differenziale lineare del secondo ordine è uguagliato non a zero (come nella (1.12)), ma a una data funzione (in questo caso la costante  $\mathcal{E}$ ). Per la tecnica risolutiva rimandiamo al § 4.6.

*Circuiti accoppiati: un sistema lineare*

Consideriamo infine la situazione in cui due circuiti diano luogo a una *mutua induzione*. Una corrente variabile  $i_1$  nel primo circuito produce, nel secondo circuito, una f.e.m. indotta proporzionale alla velocità di variazione della stessa  $i_1$ :

$$\mathcal{E}_L^{(2)} = M \frac{di_1}{dt},$$

dove  $M$  è un coefficiente di proporzionalità. Analogamente, la variazione di corrente nel secondo circuito produce nel primo la f.e.m.

$$\mathcal{E}_L^{(1)} = M \frac{di_2}{dt}.$$

Si dimostra che il coefficiente  $M$  è il medesimo nei due casi e dipende solo dalla forma dei circuiti e dal loro mutuo orientamento.



Nel caso di circuiti  $RL$ , sfruttando l'equazione (1.17) si ottiene la seguente relazione (in cui abbiamo supposto, per fissare le idee, che le f.e.m. indotte da ciascun circuito sull'altro siano di segno opposto rispetto a quello delle f.e.m. fornite dalle sorgenti):

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 = \mathcal{E}_1 - M \frac{di_2}{dt}$$

per il primo circuito; assieme all'analogo equazione per il secondo si ha

$$\begin{cases} L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 = \mathcal{E}_1 \\ M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = \mathcal{E}_2 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di due equazioni differenziali lineari del primo ordine. Posto:

$$\Lambda := \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \quad R := \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \quad \mathcal{E} := \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \end{pmatrix} \quad i(t) := \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix}$$

possiamo riscrivere

$$\Lambda \frac{di}{dt} + Ri = \mathcal{E}.$$

Se assumiamo l'invertibilità di  $\Lambda$  il sistema assume la forma

$$\frac{di}{dt} = Ai + b \tag{1.19}$$

dove  $A = -\Lambda^{-1}R$  e  $b = \Lambda^{-1}\mathcal{E}$ . Questo tipo fondamentale di sistema di equazioni differenziali verrà trattato nel Cap. 4.

## 1.5 SPECIE IN COMPETIZIONE: SISTEMI NON LINEARI

Presentiamo ora un classico modello per l'evoluzione di due specie interagenti che conduce a un sistema *nonlineare* di equazioni differenziali.

Si abbiano due popolazioni, la cui entità al tempo  $t$  è data da

$$x_1'(t) : \text{“preda”}; \quad x_2'(t) : \text{“predatore”}$$

(ad esempio volpi e conigli). Siano  $r_1$  e  $r_2$  i loro tassi di crescita, rispettivamente:

$$\frac{x_1'(t)}{x_1(t)} = r_1, \quad \frac{x_2'(t)}{x_2(t)} = r_2.$$

È naturale supporre che le variazioni delle singole popolazioni si influenzino a vicenda, per cui assumiamo che

$$r_1 = r_1(t, x_1, x_2), \quad r_2 = r_2(t, x_1, x_2).$$

Otteniamo allora un sistema di equazioni differenziali che in generale è *non lineare*:

$$\begin{cases} x_1'' = x_1 r_1(t, x_1, x_2) \\ x_2'' = x_2 r_2(t, x_1, x_2) \end{cases}$$

Introducendo le funzioni vettoriali

$$x = (x_1, x_2) : t \mapsto (x_1(t), x_2(t)), \quad f = (f_1, f_2) : (t, x) \mapsto (x_1 r_1(t, x), x_2 r_2(t, x)),$$

possiamo anche scrivere, più semplicemente,

$$x' = f(t, x).$$

Come nel caso di una singola popolazione esaminiamo due casi.

a) Partiamo dalla legge di variazione a tasso costante per ciascuna delle due specie in competizione e modifichiamola per tenere conto della presenza dell'altra specie. Così, il tasso  $x'_1/x_1 = \alpha$  (con  $\alpha > 0$  costante), valido in assenza di predatori, viene corretto sottraendo a secondo membro un termine proporzionale all'entità del predatore; otteniamo:

$$\frac{x'_1}{x_1} = \alpha - \beta x_2.$$

Analogamente, al tasso costante negativo che caratterizzerebbe la variazione di  $x_2$  in assenza di preda, viene sommato un termine proporzionale all'entità della preda:

$$\frac{x'_2}{x_2} = -\gamma + \delta x_1.$$

Ne risulta il sistema delle *equazioni di Lotka-Volterra*<sup>9</sup>:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(\alpha - \beta x_2) \\ x'_2 = x_2(-\gamma + \delta x_1) \end{cases} \quad (1.20)$$

che possiamo anche scrivere, avendo posto  $x = (x_1, x_2)$ ,

$$x' = f(x), \quad \text{con } f(x) = (x_1(\alpha - \beta x_2), x_2(-\gamma + \delta x_1)). \quad (1.21)$$

b) Correggiamo ora ciascuna delle due equazioni in (1.20) rimpiazzando i tassi  $\alpha$  e  $-\gamma$  con un termine analogo a quello che nell'equazione logistica introduceva la capacità di carico dell'ambiente:

$$\begin{cases} x'_1/x_1 = \alpha - \lambda x_1 - \beta x_2 \\ x'_2/x_2 = -\gamma - \mu x_2 + \delta x_1 \end{cases}$$

o anche

$$\begin{cases} x'_1 = (\alpha - \lambda x_1 - \beta x_2)x_1 \\ x'_2 = (-\gamma - \mu x_2 + \delta x_1)x_2 \end{cases} \quad (1.22)$$

Accenneremo al comportamento delle soluzioni nel § 1.9, dopo aver puntualizzato il quadro generale in cui collocare i problemi differenziali presentati in questo capitolo.

## 1.6 PENDOLO SEMPLICE

Consideriamo un punto di massa  $m$  sospeso ad un punto fisso mediante un filo inestensibile di lunghezza  $l$ . Assumiamo il punto di sospensione come origine di un sistema di riferimento cartesiano nel piano verticale in cui supponiamo che si svolga il moto; l'asse delle ordinate è verticale, diretto verso l'alto. Indichiamo con  $\vartheta$  lo scostamento angolare rispetto alla posizione verticale misurato in senso antiorario (vedi Figura 1.6), e con  $\mathbf{u}_t$  il versore tangente (secondo l'orientamento antiorario).

<sup>9</sup>Proposto indipendentemente nel 1924 dal demografo americano Alfred James Lotka e nel 1926 dal matematico italiano Vito Volterra.

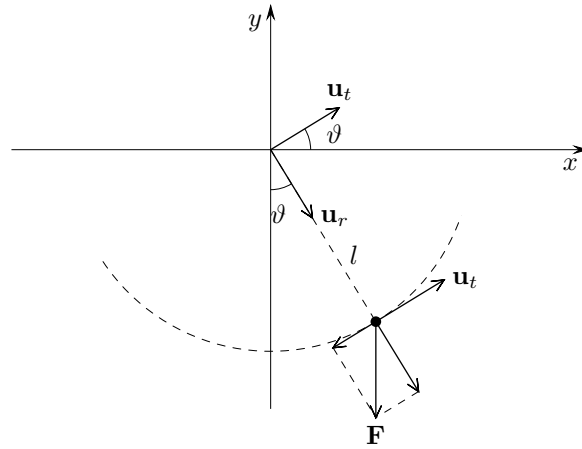


Figura 1.6 - Pendolo semplice

Per individuare le equazioni del moto utilizziamo la seconda legge della dinamica  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , proiettata lungo il versore tangente  $\mathbf{u}_t = (\cos \vartheta)\mathbf{i} + (\sin \vartheta)\mathbf{j}$ :

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_t = m\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_t. \quad (1.23)$$

Indichiamo con  $\vartheta = \vartheta(t)$  il valore dell'angolo al tempo  $t$ ; se  $l$  è la lunghezza del pendolo, risulta:

$$\begin{cases} x(t) = l \sin \vartheta(t) \\ y(t) = -l \cos \vartheta(t) \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = l\dot{\vartheta} \cos \vartheta \\ \dot{y}(t) = l\dot{\vartheta} \sin \vartheta. \end{cases}$$

Le componenti dell'accelerazione sono quindi:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -l\dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta + l\ddot{\vartheta} \cos \vartheta \\ \ddot{y}(t) = l\dot{\vartheta}^2 \cos \vartheta + l\ddot{\vartheta} \sin \vartheta \end{cases} \quad (1.24)$$

Allora, tenendo conto che l'unica forza che ha una componente non nulla lungo la direzione tangente è la forza peso  $-mg\mathbf{j}$ , la (1.23) diventa<sup>10</sup>:

$$-mg \sin \vartheta = ml\ddot{\vartheta}$$

Quindi

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l} \sin \vartheta = 0. \quad (1.25)$$

Si tratta di un'equazione differenziale *non lineare* del secondo ordine. Per "piccole" oscillazioni possiamo assumere che  $\sin \vartheta \sim \vartheta$ , per cui si ottiene un'equazione *lineare*:

$$\ddot{\vartheta} + \omega^2 \vartheta = 0 \quad \omega^2 = \frac{g}{l},$$

<sup>10</sup>Alternativamente si può osservare che  $\dot{\vartheta}$  rappresenta la velocità angolare del punto sospeso, quindi  $\dot{\vartheta}l$  è la velocità scalare e  $\ddot{\vartheta}l$  l'accelerazione tangenziale.

che è l'equazione del moto armonico incontrata nel paragrafo 1.3. Nei limiti di questa approssimazione il periodo

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

risulta indipendente dall'ampiezza delle oscillazioni (*isocronismo delle piccole oscillazioni*), legge sperimentalmente osservata già da Galileo.

## 1.7 EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER

L'equazione di Schrödinger svolge in meccanica quantistica il ruolo che le equazioni di Maxwell svolgono in elettromagnetismo. Per una particella di massa  $m$  ed energia potenziale  $U(x, t)$  essa assume la forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x\psi(x, t) + U(x, t)\psi(x, t) = i\hbar\frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t}, \quad (1.26)$$

dove  $x$  indica la variabile spaziale (in una, due o tre dimensioni) e  $t$  la variabile temporale,  $\Delta_x$  è il laplaciano rispetto alle variabili spaziali e  $\hbar = h/2\pi$ , con  $h$  costante di Planck. La  $\psi$  è la funzione d'onda, a valori complessi; separando la parte reale e quella immaginaria possiamo equivalentemente considerare due equazioni differenziali in campo reale.

Se supponiamo il potenziale indipendente dal tempo, il metodo della *separazione delle variabili* consente di caratterizzare le eventuali soluzioni della forma

$$\psi(x, t) = u(x)\varphi(t).$$

Infatti per tali soluzioni la (1.26) diventa:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta u(x))\varphi(t) + U(x)u(x)\varphi(t) = i\hbar u(x)\varphi'(t);$$

dividendo per  $u(x)\varphi(t)$  abbiamo:

$$\frac{1}{u(x)}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u(x) + U(x)u(x)\right] = i\hbar\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}.$$

Deve pertanto esistere  $E \in \mathbb{C}$  tale che

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u(x) + U(x)u(x) = Eu(x) \quad (1.27)$$

$$\varphi'(t) = \frac{E}{i\hbar}\varphi(t) \quad (1.28)$$

La seconda equazione, a parte essere espressa in  $\mathbb{C}$ , è della stessa forma di (1.3). Sia  $t_0$  è un punto in cui  $\varphi$  non si annulla; ricordando che, se  $\log$  indica una qualunque determinazione del logaritmo differenziabile in un intorno di  $\varphi(t_0)$  allora  $\frac{d}{dt}\log\varphi(t) = \varphi'(t)/\varphi(t)$ , possiamo svolgere i medesimi ragionamenti utilizzati nel § 1.1. Allora localmente, e quindi globalmente, deve essere  $\varphi(t) = Ce^{\frac{E}{i\hbar}t}$ , per un'opportuna costante  $C$ . Concludiamo che la famiglia delle soluzioni è data da:

$$\varphi(t) = \varphi(0)e^{\frac{E}{i\hbar}t},$$

al variare del valore  $\varphi(0) \in \mathbb{C}$ .

**OSSERVAZIONE 1.7.1** Sia  $a = \alpha + i\beta$  un dato numero complesso; l'equazione  $\varphi'(t) = a\varphi(t)$  (fra cui rientra la (1.28)) dà luogo a un sistema differenziale lineare considerando separatamente la parte

reale e la parte immaginaria di  $\varphi$ . Infatti, posto  $\varphi(t) = u(t) + iv(t)$ , l'uguaglianza  $\varphi'(t) = a\varphi(t)$  diventa:

$$\begin{cases} u' = \alpha u - \beta v \\ v' = \beta u + \alpha v, \end{cases}$$

che è della stessa forma di (1.19) (qui ora  $b = 0$ ).

L'equazione soddisfatta da  $u$  nel caso monodimensionale, cioè

$$-\frac{\hbar^2}{2m}u''(x) + U(x)u(x) = Eu(x) \quad (1.29)$$

è detta *equazione di Schrödinger degli stati stazionari* ed è una equazione *lineare del secondo ordine* a coefficienti, in generale, *non costanti*. La variabilità dei coefficienti rende lo studio di questo tipo di equazioni completamente diverso dallo studio delle equazioni a coefficienti costanti (come l'equazione (1.12) del moto armonico o l'equazione (1.18) per i circuiti *RLC*). Vedremo un esempio nel Capitolo 6.

Le soluzioni dipendono dal tipo di energia potenziale considerata. Le condizioni di regolarità che devono essere richieste per avere soluzioni fisicamente significative (*in primis* la condizione di essere a quadrato integrabile) individuano una successione  $\psi_n$  di funzioni e di valori  $E_n$  corrispondenti. Questi ultimi, che si dimostrano essere numeri reali, hanno il significato di energia totale dello stato stazionario individuato dalla corrispondente soluzione: ne risulta la *quantizzazione* dell'energia del sistema (per il caso particolare del potenziale armonico, cui ora accenniamo, si veda il § 6.4).

*Caso del potenziale armonico.* Nel caso monodimensionale, se

$$U(x) = \frac{1}{2}Kx^2$$

eseguiamo, nella (1.29), il cambiamento di variabili:

$$\xi = \alpha x, \quad u(x) = u(\xi/\alpha) =: v(\xi),$$

dove

$$\alpha = \left(\frac{mK}{\hbar^2}\right)^{1/4}.$$

Poiché  $u(x) = v(\alpha x)$ , si ottiene l'equazione:

$$v''(\xi) + (\varepsilon - \xi^2)v(\xi) = 0, \quad (1.30)$$

dove si è posto  $\varepsilon = (2E/\hbar)\sqrt{m/K}$ . L'ulteriore cambiamento di variabile:

$$v(\xi) = H(\xi)e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

conduce all'*equazione di Hermite*

$$H'' - 2\xi H' + (\varepsilon - 1)H = 0. \quad (1.31)$$

Come accenneremo nel § 6.4, a partire da questa è possibile ricavare la famiglia dei cosiddetti *polinomi di Hermite*, mediante i quali rappresentare la generica soluzione dell'equazione di Schrödinger degli stati stazionari.

## 1.8 ELASTICHE PIANE; UN ESEMPIO DI PROBLEMI AI LIMITI

In questo paragrafo accenniamo alla modellizzazione matematica delle cosiddette *verghe elastiche* nel caso *piano*. Una verga è un solido deformabile che, dal punto di vista geometrico è rappresentabile mediante una linea  $\gamma$  (pertanto supponiamo che la sezione sia di ampiezza trascurabile rispetto alla lunghezza), mentre dal punto di vista meccanico soddisfa opportune richieste, di seguito precisate, sugli sforzi interni che si producono in presenza di sollecitazioni.

Inquadriamo dapprima il problema nello spazio tridimensionale. Sia  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  una rappresentazione parametrica semplice e  $C^1$  della curva  $\gamma$ ; poniamo  $A = \varphi(a)$  e  $B = \varphi(b)$ . Supponiamo che la verga  $AB$  sia in equilibrio sotto l'azione di date forze esterne. Comunque preso il punto  $P = \varphi(t)$ , se immaginiamo di rimuovere il tratto  $PB$ , la parte rimanente  $AP$  non sarà più, in generale, in equilibrio. Per ripristinarne l'equilibrio dobbiamo applicare in  $P$  un sistema di forze che traduce l'azione di  $PB$  su  $AP$ : tale sistema si può ridurre ad una forza  $\mathbf{T}$  e una coppia di momento  $\mathbf{\Gamma}$ . I due vettori  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{\Gamma}$  caratterizzano gli *sforzi* interni nel punto  $P$ .<sup>11</sup> Supporremo regolari quanto sarà necessario le due funzioni  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{\Gamma}$  che risultano così definite su  $[a, b]$ . La componente di  $\mathbf{T}$  tangente alla curva e la componente nel piano normale sono dette rispettivamente *sforzo assiale* e *sforzo di taglio*, mentre le componenti tangente e normale di  $\mathbf{\Gamma}$  si dicono *momento torcente* e *momento flettente*, rispettivamente.

Particolarizziamo ora la situazione: consideriamo verghe che *giacciono su un piano*, diciamo  $xy$ , e sono soggette solamente a forze di questo piano applicate agli estremi: siano esse  $\mathbf{F}(A)$  e  $\mathbf{F}(B)$ . Poiché il sistema è in equilibrio deve essere  $\mathbf{F}(A) + \mathbf{F}(B) = \mathbf{0}$ . Del resto, fissato arbitrariamente un punto  $P$  della linea, per definizione di  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{\Gamma}$  anche il tratto  $AP$  è in equilibrio sotto l'azione delle forze  $\mathbf{F}(A)$  e  $\mathbf{T}(P)$  e del momento  $\mathbf{\Gamma}(P)$  applicato in  $P$ . Pertanto deve essere:

$$\mathbf{F}(A) + \mathbf{T}(P) = \mathbf{0}, \quad (P - A) \wedge \mathbf{T}(P) + \mathbf{\Gamma}(P) = \mathbf{0}.$$

In particolare la forza  $\mathbf{T}$  è costante e vale la relazione:

$$\mathbf{\Gamma}(P) = (P - A) \wedge \mathbf{F}(A), \quad \text{per ogni punto } P \text{ di } AB. \quad (1.32)$$

Allora il momento  $\mathbf{\Gamma}$  è in ogni punto perpendicolare al piano  $xy$  della verga, e quindi è un momento flettente:  $\mathbf{\Gamma} = \Gamma_z \mathbf{k}$ .

Le condizioni di equilibrio, in particolare l'equazione (1.32), non possono essere da sole sufficienti per determinare la configurazione di equilibrio una volta note le forze applicate: infatti deve essere nota una relazione costitutiva che specifichi il legame fra gli sforzi interni e la variazione della configurazione corrispondente. Si è rivelata modellisticamente proficua, come relazione costitutiva, l'ipotesi (risalente a Eulero) che

*il momento flettente è proporzionale alla variazione  $\Delta\kappa$  della curvatura della verga.*

La costante di proporzionalità dipende dalla natura della verga (materiale utilizzato, dimensione della sezione trasversale, ecc.). Per tradurre analiticamente la relazione costitutiva, ci poniamo nella situazione particolare in cui la verga, in assenza di sollecitazione, sia rettilinea, disposta come l'asse  $x$  e che le forze applicate agli estremi siano (opposte e) disposte anch'esse come l'asse  $x$ . Supponiamo inoltre che la configurazione di equilibrio che si realizza con questo sistema di forze sia rappresentabile come grafico  $y = u(x)$  di una funzione  $u: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (vedi Figura 1.7). Poiché in condizioni di riposo la verga è rettilinea, la variazione di curvatura prodotta coincide con la curvatura stessa, cioè:  $\kappa = u''(x) / (1 + u'(x)^2)^{3/2}$ . Così espressa la curvatura presenta segno positivo o negativo nei punti di convessità o concavità, rispettivamente; queste due situazioni corrispondono a momenti flettenti

<sup>11</sup>I concetti ora esposti trovano la loro naturale collocazione nello studio dei continui deformabili, per i quali svolge un ruolo chiave il cosiddetto *tensore degli sforzi*. Per una trattazione approfondita rimandiamo ai testi dedicati all'argomento (citiamo, ad esempio, [7]).

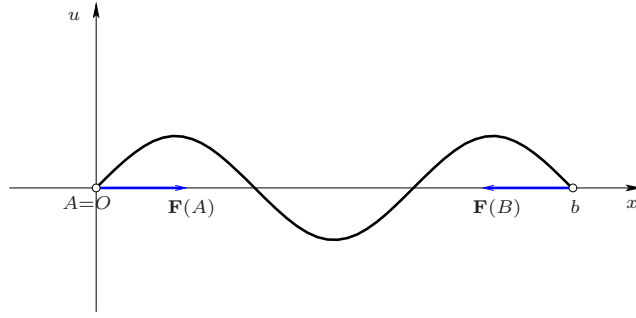


Figura 1.7 - Una verga elastica piano sollecitata da forze opposte applicate agli estremi.

$\Gamma_z \mathbf{k}$  con  $\Gamma_z \geq 0$  o  $\Gamma_z \leq 0$ , rispettivamente. Tenendo conto di ciò possiamo tradurre la relazione costitutiva nell'equazione:

$$\Gamma_z = K \frac{u''(x)}{(1 + u'(x)^2)^{3/2}},$$

con  $K$  costante positiva (costante di "rigidezza"). Posto  $\mathbf{F}(A) = f\mathbf{i}$ , con  $f > 0$ , abbiamo

$$(\mathbf{P} - A) \wedge \mathbf{F}(A) = (x\mathbf{i} + u(x)\mathbf{j}) \wedge f\mathbf{i} = -fu(x)\mathbf{k}.$$

Allora la (1.32) diventa:

$$Ku''(x)/(1 + u'(x)^2)^{3/2} = -fu(x),$$

cioè

$$u''(x) + \lambda u(x)(1 + u'(x)^2)^{3/2} = 0, \quad (1.33)$$

con  $\lambda = f/K > 0$ . Questa è la cosiddetta equazione delle *linee elastiche piane*.

L'equazione (1.33) è un'equazione del secondo ordine *non lineare*, poiché l'operatore differenziale a primo membro non è lineare nella derivata prima. Se la configurazione di equilibrio  $y = u(x)$  si discosta poco dalla configurazione rettilinea è però possibile trascurare il termine  $u'$  nell'espressione della curvatura, ottenendo così l'equazione

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0,$$

cioè l'equazione del moto armonico.

Nelle ipotesi in cui ci siamo posti, la configurazione di equilibrio è soluzione di un problema del secondo ordine di tipo differente rispetto ai problemi ai valori iniziali per equazioni del secondo ordine di cui abbiamo incontrato un esempio in (1.15). Infatti ora cerchiamo, fra le soluzioni della (1.33), quelle che verificano le condizioni agli estremi  $u(0) = u(b) = 0$ , quindi:

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x)(1 + u'(x)^2)^{3/2} = 0, \\ u(0) = u(b) = 0. \end{cases} \quad (1.34)$$

Si tratta di un cosiddetto *problema ai limiti* per un'equazione del secondo ordine. Come l'intuizione fisica suggerisce, l'esistenza di soluzioni (diverse dalla soluzione nulla) richiede un legame fra il parametro  $\lambda$  (cioè il rapporto fra la forza applicata e la costante di rigidezza) e l'ampiezza  $b$  dell'intervallo. Fissato l'intervallo  $[0, b]$ , i valori  $\lambda$  per i quali il problema (1.34) ammette soluzioni non nulle sono dette *autovalori* del problema. Per questo tipo di problemi accenneremo solamente, nel § 6.1, al caso particolare dell'equazione linearizzata  $u'' + \lambda u = 0$  (che incontreremo nel contesto, molto differente, della separazione di variabili per l'equazione di Laplace).

## 1.9 EQUAZIONI IN FORMA NORMALE. RAPPRESENTAZIONE DELLE SOLUZIONI.

Molti problemi e risultati fondamentali per le equazioni differenziali presentate nei paragrafi precedenti possono essere utilmente inquadrati in una teoria generale. Cerchiamo innanzitutto di unificare, anche dal punto di vista notazionale, le equazioni incontrate finora.

Sia  $D$  un aperto di  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione continua.

DEFINIZIONE 1.9.1 Diciamo che una funzione  $x: J \rightarrow \mathbb{R}^n$  è soluzione dell'equazione differenziale:

$$x' = f(t, x) \tag{1.35}$$

se  $J$  è un intervallo,  $x \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ , risulta  $(t, x(t)) \in D$  per ogni  $t \in J$  e

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{per ogni } t \in J.$$

Le equazioni della forma (1.35) si dice che sono poste in *forma normale*. Useremo in genere la parola 'equazione' anche nel caso dei 'sistemi' di equazioni, cioè  $n > 1$ .

In questa tipologia, con  $n = 1$ , rientrano palesemente le equazioni (1.1), (1.16), (1.17) precedentemente incontrate; nel caso  $n = 2$ , invece, rientrano gli esempi (1.19), (1.21) e (1.22).

Il significato modellistico delle soluzioni già motiva l'opportunità di considerare come soluzioni funzioni definite su intervalli (non è ammessa una discontinuità temporale): se matematicamente una funzione è definita sull'unione di due intervalli disgiunti e risolve l'equazione, intenderemo che dà luogo a *due* soluzioni. Questa convenzione semplificherà anche alcuni degli enunciati generali che verranno esposti nel seguito.

DEFINIZIONE 1.9.2 Dato  $(t_0, x_0) \in D$ , diciamo *soluzione del problema ai valori iniziali (o di Cauchy)*:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ogni funzione  $x$  che sia una soluzione di  $x' = f(t, x)$  in un intervallo  $J$  contenente  $t_0$  e si abbia  $x(t_0) = x_0$ . Diremo anche che la soluzione  $x$  passa per il punto  $(t_0, x_0)$ .

L'estensione al secondo ordine della forma normale (1.35) è:

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \tag{1.36}$$

con  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  funzione continua su un aperto  $D \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$ . È facile vedere che in questa tipologia rientrano le equazioni (1.12), (1.25), (1.29) o (1.31), e (1.33) precedentemente incontrate. Tuttavia le equazioni (1.36) possono essere equivalentemente trasformate in equazioni in forma normale del *primo ordine*, a patto di aumentare il numero delle equazioni e delle funzioni incognite. Infatti, se poniamo

$$x' = v,$$

l'equazione (1.36) si trasforma nel sistema del primo ordine:

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = f(t, x, v) \end{cases}$$

che possiamo anche scrivere, in forma più compatta, come:

$$u' = F(t, u(t)) \tag{1.37}$$

con

$$u = (x, v) \quad \text{e} \quad F(t, u) = (v, f(t, x, v)).$$



È facile vedere la generalizzazione a equazioni differenziali di ordine  $n$  del tipo:

$$x^{(n)} = f(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t)), \tag{1.38}$$

dette in *forma normale*. Anche per esse possiamo ricondurci allo studio di un'equazione del primo ordine; ponendo

$$x_0 = x, \quad x_1 = x', \quad x_2 = x'', \quad \dots, \quad x_{n-1} = x^{(n-1)};$$

otteniamo, equivalentemente

$$\begin{cases} x'_0 = x_1 \\ x'_1 = x_2 \\ \dots \\ x'_{n-2} = x_{n-1} \\ x'_{n-1} = f(t, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \end{cases}$$

Questo sistema è della forma

$$u' = f(t, u), \quad \text{con } u = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}),$$

quindi della forma (1.35). Per l'equazione (1.38) il problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} x^{(n)} = f(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t)), \\ x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, x''(t_0) = x_2, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}, \end{cases}$$

con  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  assegnati, si traduce nel problema ai valori iniziali per il sistema equivalente del primo ordine con i dati:

$$x_0(t_0) = x_0, \quad x_1(t_0) = x_1, \quad x_2(t_0) = x_2, \quad \dots, \quad x_{n-1}(t_0) = x_{n-1},$$

secondo la Definizione 1.9.2. Pertanto, possiamo affermare che la teoria dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie in forma normale conserva tutta la sua generalità anche se ci si limita a considerare sistemi del primo ordine.

Nel capitolo successivo svilupperemo gli elementi di base della teoria delle equazioni differenziali del primo ordine che possono essere poste in forma normale: per esse è infatti possibile sviluppare un soddisfacente quadro di risultati. La teoria per le equazioni della forma più generale

$$F(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t), x^{(n)}(t)) = 0$$

è invece fortemente dipendente dalla tipologia della funzione  $F$ .

Poiché alla base della risoluzione di un'equazione differenziale sta un procedimento di integrazione, per indicare la famiglia di tutte le soluzioni di un'equazione differenziale viene spesso utilizzato il termine di *integrale generale* dell'equazione stessa.



Nel caso scalare ( $n = 1$ ) la richiesta che una funzione  $x: J \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  sia soluzione dell'equazione  $x' = f(t, x)$  si traduce nella condizione che il suo grafico sia contenuto in  $D$  (dominio di  $f$ ) e in ogni suo punto  $(t, x(t))$  la retta tangente abbia pendenza  $f(t, x(t))$  (Figura 1.9). Un discorso analogo, anche se di minor efficacia dal punto di vista grafico, può essere svolto nel caso generale  $n \geq 1$  relativamente alle tangenti alla curva  $t \mapsto (t, x(t))$  nello spazio delle coordinate  $tx$ .

Particolarmente importante, anche dal punto di vista grafico, è la situazione in cui la funzione  $f$  non dipende dalla variabile  $t$  (nella notazione della (1.35)). Sia  $\Omega$  un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$  e

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{continua;}$$

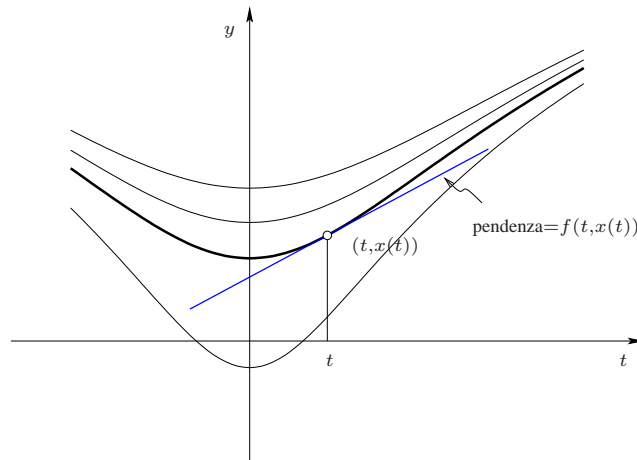


Figura 1.8 - La condizione che la funzione (scalare)  $x$  sia soluzione dell'equazione  $x' = f(t, x)$  si traduce geometricamente nella condizione che il grafico di  $x$  abbia in ogni punto come pendenza proprio il valore di  $f$  in quel punto.

l'equazione (sistema di equazioni):

$$x' = f(x)$$

è detta *autonoma*. Gli esempi precedentemente visti rientrano tutti in questa categoria (a parte i casi generali esposti nei § 1.1 e § 1.5, in cui i tassi di variazione dipendono dal tempo). Per equazioni di ordine superiore si utilizza il termine *autonomo* nel caso in cui tale sia il sistema equivalente del primo ordine. Così, è autonoma l'equazione (1.25) del pendolo semplice o la (1.33) delle linee elastiche; mentre non è di tipo autonomo l'equazione (1.29): infatti i coefficienti dell'equazione dipendono da  $x$ , per cui il sistema equivalente (ponendo  $y_0 = u$ )

$$\begin{cases} y_0' = y_1 \\ y_1' = \frac{2m}{\hbar^2}(U(x) - E)y_0 \end{cases}$$

non è di tipo autonomo (a meno che il potenziale non sia costante).

L'insieme  $\Omega$  è lo *spazio degli stati*: se  $y(\cdot)$  è una soluzione, il valore  $y(t)$  rappresenta lo 'stato' del 'sistema' (fisico, naturale, ...) all'istante di tempo  $t$ : la consistenza della popolazione che evolve secondo la (1.3) o la (1.5), la carica o l'intensità di corrente nei circuiti di cui alle (1.16) o (1.17), il valore della coppia  $i = (i_1, i_2)$  nel caso dei circuiti accoppiati in (1.19), il valore della coppia preda-predatore nelle equazioni (1.20) di Lotka-Volterra, ecc. Per le equazioni del secondo ordine, come la (1.12) (oscillatore armonico), in cui la grandezza è la posizione di un punto (o di un sistema di punti), lo spazio degli stati per il sistema equivalente del primo ordine diventa lo spazio delle coppie posizione-velocità (e si parla anche di *spazio delle fasi*).

Le soluzioni danno luogo a curve in  $\Omega$  che sono tangenti al campo  $f$  in ciascun punto (vedi Figura 1.9); più precisamente,  $f(x(t))$  rappresenta la 'velocità' con cui viene percorsa la curva nel punto  $x(t)$ . La conoscenza del campo vettoriale  $f$  (indipendente dal 'tempo') permette così di ricavare informazioni sulle 'traiettorie' del punto  $x(t)$ .

Ad esempio, in Figura 1.10 è rappresentato il campo vettoriale relativo all'equazione (1.20) o (1.21): si intuisce che le curve-soluzione "ruotano attorno al punto di equilibrio"  $(x_1^0, x_2^0) = (\gamma/\delta, \alpha/\beta)$ .

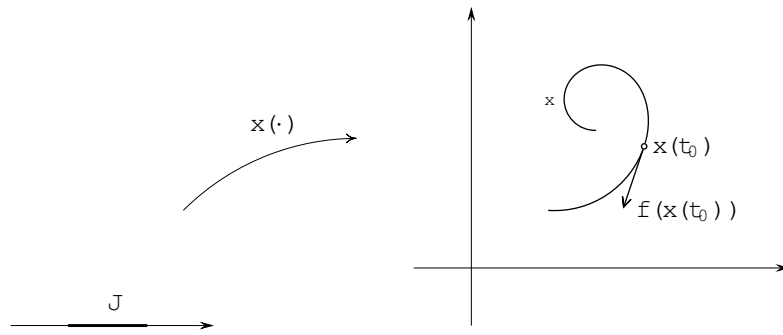


Figura 1.9 - Rappresentazione grafica di una soluzione:  $\gamma_x$  è il luogo descritto dal punto  $x(t)$  al variare di  $t \in J$ .

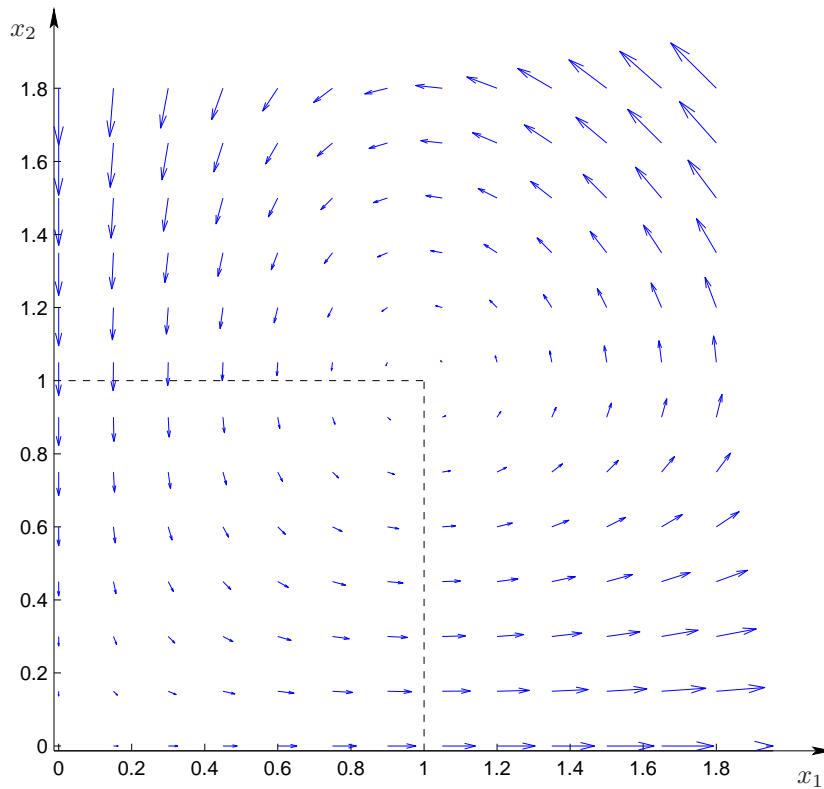


Figura 1.10 - Campo  $f$  per il sistema (1.20) (nel caso  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ ). Qui il punto di equilibrio  $(x_1^0, x_2^0)$  è  $(1, 1)$ .

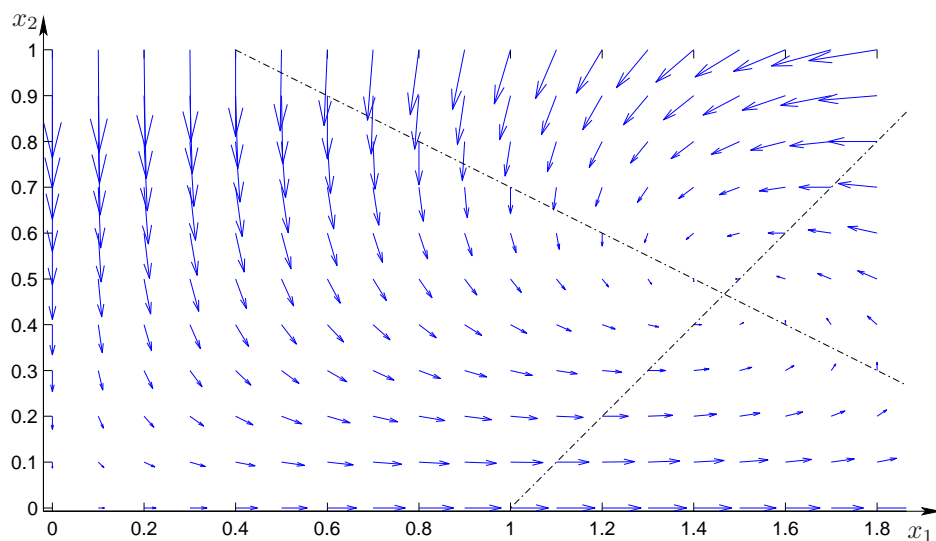


Figura 1.11 - Campo  $f$  per il sistema (1.22) (nel caso  $\alpha = 1.2, \beta = \gamma = \delta = \mu = 1$  e  $\lambda = 0.5$ ). Il punto di equilibrio  $(x_1^0, x_2^0)$  diverso dall'origine è dato dall'intersezione delle rette  $\lambda x_1 + \beta x_2 - \alpha = 0$  e  $\delta x_1 - \mu x_2 - \gamma = 0$ . Su ciascuna di tali rette si annulla una componente del campo  $f$ .

La Figura 1.11 è invece relativa all'equazione (1.22) nel caso in cui il "punto di equilibrio"  $(x_1^0, x_2^0)$  corrispondente alla soluzione costante che annulla il secondo membro dell'equazione sia in  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ . Si intuisce un movimento a spirale verso  $(x_1^0, x_2^0)$ .

Rimandiamo al § 2.6 per alcuni concetti di base sui sistemi autonomi.

## Capitolo 2

# PROBLEMI AI VALORI INIZIALI PER SISTEMI DEL PRIMO ORDINE

In questo capitolo esponiamo i risultati di base relativi alle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali del primo ordine in forma normale. Un ruolo chiave è svolto dallo studio del problema ai valori iniziali: dopo averne illustrato i classici risultati di esistenza e unicità, viene affrontata l'indagine dell'ampiezza dell'intervallo su cui possiamo garantire l'esistenza di una soluzione. Il contesto porge l'occasione per presentare due risultati (Lemma di Gronwall e disuguaglianze differenziali) che forniscono importanti strumenti di stima per le soluzioni di un'equazione differenziale, strumenti spesso utili nel problema della determinazione del più ampio intervallo di esistenza delle soluzioni.

Un altro aspetto che verrà preso in considerazione, e la cui rilevanza è messa bene in luce dagli esempi del capitolo precedente, riguarda l'analisi della dipendenza delle soluzioni dai vari *dati* del problema: è infatti essenziale, per l'utilizzo di un modello matematico, che al variare dei parametri che intervengono nell'equazione (spesso noti a meno di un'approssimazione sperimentale) la corrispondente soluzione vari almeno con continuità.

Il capitolo si chiude con l'esposizione dei concetti chiave che verranno utilizzati nel seguito riguardo all'importante classe dei sistemi *autonomi*.

### 2.1 RISULTATI DI ESISTENZA ED UNICITÀ

Sia  $D$  un aperto di  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione continua. Ci occupiamo dell'esistenza di soluzioni per l'equazione

$$x' = f(t, x) \tag{2.1}$$

con il valore iniziale  $x(t_0) = x_0$ , dove  $(t_0, x_0)$  è un dato punto di  $D$ . Stiamo pertanto considerando il *problema ai valori iniziali*, o *problema di Cauchy*,

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{P}$$

Ricordiamo che, nella definizione di soluzione, abbiamo posto la richiesta che il dominio sia un *intervallo* (vedi § 1.9).

Premettiamo una caratterizzazione integrale delle soluzioni del problema (P).

LEMMA 2.1.1 *Sia  $x$  una funzione continua su un intervallo  $J$  e tale che  $(t, x(t)) \in D$  per ogni  $t \in J$ . Sia  $(t_0, x_0) \in D$ . Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- a)  $x$  è soluzione di (P);

$$b) \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds \text{ per ogni } t \in J.$$

*Dimostrazione.* Una semplice applicazione del teorema fondamentale del calcolo integrale.  $\square$

Ricordiamo che una funzione  $g: G \rightarrow \mathbb{R}^k$ , con  $G \subseteq \mathbb{R}^m$  insieme dato, si dice *lipschitziana* su un insieme  $E \subseteq G$  se esiste una costante  $L_E \geq 0$  tale che

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

comunque presi  $x_1, x_2 \in E$ . Nel seguito utilizzeremo, per la funzione  $f$  di cui all'equazione (2.1), la cosiddetta condizione di *lipschitzianità nella seconda variabile, uniformemente rispetto alla prima*, su un insieme  $E \subseteq D$ , condizione che si traduce nella richiesta che esista una costante  $L_E > 0$  per la quale

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L_E|x_1 - x_2|$$

comunque presi  $(t, x_1), (t, x_2) \in E$ . Nel caso in cui questa condizione sia richiesta su ogni compatto  $K$  di  $D$  parleremo di *lipschitzianità locale* di  $f$  su  $D$  (nella seconda variabile, uniformemente rispetto alla prima).

Non è difficile vedere come la condizione  $g \in C^1(\overline{G}; \mathbb{R}^k)$  assicuri la condizione di lipschitzianità nell'ipotesi che  $G$  sia convesso. Infatti, dati  $x_1, x_2 \in G$ , possiamo considerare la funzione

$$\varphi(t) = g(x_1 + t(x_2 - x_1)).$$

Risulta:

$$|g(x_1) - g(x_2)| = \left| \int_0^1 \varphi'(s) \, ds \right| = \left| \int_0^1 Dg(x_1 + s(x_2 - x_1)) \cdot (x_2 - x_1) \, ds \right| \leq \left( \max_{\overline{G}} |Dg| \right) |x_1 - x_2|.$$

In realtà vale un risultato più generale:

**PROPOSIZIONE 2.1.2** *Ogni funzione  $g \in C^1(G; \mathbb{R}^k)$ , con  $G$  sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^m$ , è lipschitziana su ciascun sottoinsieme compatto di  $G$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $K \subseteq G$  compatto. Se  $g|_K$  non fosse lipschitziana, per ogni  $j \in \mathbb{N}$  esisterebbero  $x_j^1, x_j^2 \in K$  tali che

$$|g(x_j^1) - g(x_j^2)| > j|x_j^1 - x_j^2|. \quad (2.2)$$

Poiché  $K$  è compatto possiamo supporre (a meno di passare a sottosuccessioni) che  $(x_j^1)_j$  e  $(x_j^2)_j$  siano convergenti. Dal momento che

$$|x_j^1 - x_j^2| \leq \frac{2}{j} \max_K |g| \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0,$$

il limite delle due successioni è uno stesso punto  $\bar{x} \in K$ . Sia  $r > 0$  tale che  $B_r(\bar{x}) \subseteq G$ ; per  $j$  sufficientemente grande risulta  $x_j^1, x_j^2 \in B_r(\bar{x})$ . In base a quanto osservato sopra nel caso convesso, si ha

$$|g(x_j^2) - g(x_j^1)| \leq \left( \max_{\overline{B_r(\bar{x})}} |Dg| \right) |x_j^2 - x_j^1|.$$

Ciò contraddice la (2.2).  $\square$

Siano ora  $a, b > 0$  tali che il “rettangolo” (vedi Figura 2.1)

$$R = R_{a,b}(t_0, x_0) = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}_b(x_0)$$

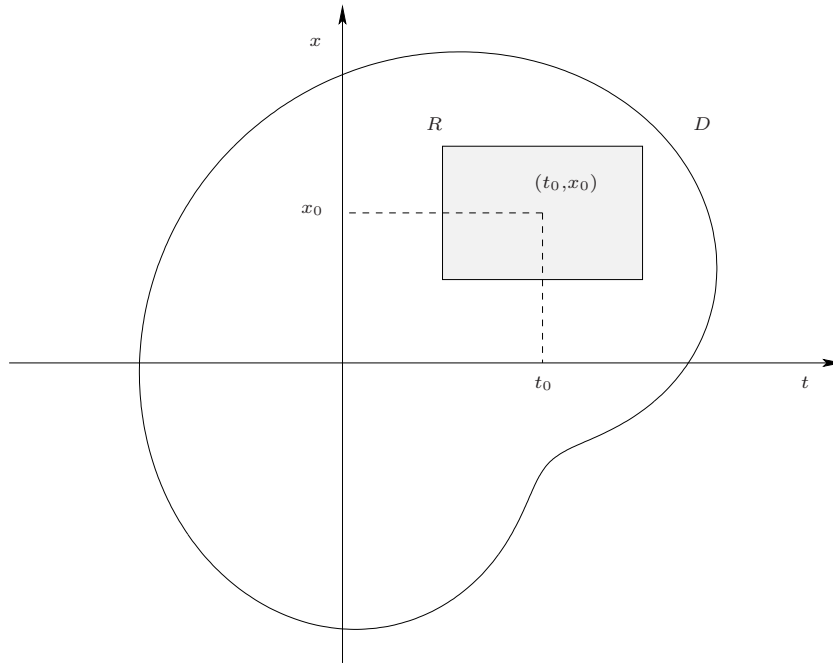


Figura 2.1 - Se  $R_{a,b}(t_0, x_0) \subseteq D$  l'esistenza di una soluzione soddisfacente al dato  $x(t_0) = x_0$  è garantita nell'intervallo  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , con  $\alpha = \min(a, b / \max_R |f|)$  (Teorema 2.1.3).

sia contenuto in  $D$  (con  $\overline{B}_b(x_0)$  intendiamo la chiusura della palla di centro  $x_0$  e raggio  $b$ ).

**TEOREMA 2.1.3 (ESISTENZA E UNICITÀ) (Picard-Lindelöf)** *Supponiamo che in  $D$  la funzione  $f = f(t, x)$  sia continua e sia localmente lipschitziana nella seconda variabile uniformemente rispetto alla prima. Sia  $R := R_{a,b}(t_0, x_0) \subseteq D$ . Allora:*

a) il problema (P) ammette soluzione nell'intervallo  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , dove

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right),$$

essendo  $M$  una limitazione per  $|f|$  su  $R$ .

b) esiste al più una soluzione del problema (P), nel senso che se  $x_1, x_2$  sono due soluzioni di (P) in un intorno  $J$  (destro o sinistro) di  $t_0$ , allora  $x_1 = x_2$  in  $J \cap [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .

*Dimostrazione.* a) (**Esistenza**) In base al lemma precedente ricerchiamo una funzione  $x$  continua in  $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  il cui grafico sia contenuto in  $D$  e tale che

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds \quad \text{per ogni } t \in I. \quad (2.3)$$

Osserviamo che, data una funzione  $x \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$ , se il suo grafico è contenuto in  $R$ , allora la funzione

$$Tx: t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds$$

è definita in  $I$  e ha anch'essa il grafico in  $R$ . Infatti, per ogni  $t \in I$

$$|(Tx)(t) - x_0| \leq \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds \right| \leq M|t - t_0| \leq b.$$

Allora  $T$  è un operatore da  $C^0(I; \overline{B}_b(x_0))$  in sé, per cui possiamo definire, per ricorrenza, la seguente successione di funzioni:

$$x_0(\cdot) \equiv x_0 \quad x_{k+1} = Tx_k \quad (k = 0, 1, 2 \dots).$$

Dimostriamo che  $(x_k)$  converge uniformemente in  $I$  a una funzione continua  $x$ . Innanzitutto risulta:

$$|x_1(t) - x_0(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t f(s, x_0) \, ds \right| \leq M|t - t_0|;$$

mediante questa stimiamo analogamente  $|x_2(t) - x_1(t)|$ , tenendo conto della lipschitzianità di  $f$  nella seconda variabile:

$$\begin{aligned} |x_2(t) - x_1(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t (f(s, x_1(s)) - f(s, x_0(s))) \, ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t |x_1(s) - x_0(s)| \, ds \right| \leq ML \left| \int_{t_0}^t |s - t_0| \, ds \right| \end{aligned}$$

( $L$  è una costante di Lipschitz di  $f$  su  $R$ ), da cui

$$|x_2(t) - x_1(t)| \leq \frac{1}{2}ML(t - t_0)^2.$$

Un semplice ragionamento per induzione porta a:

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leq \frac{1}{(k+1)!}ML^k|t - t_0|^{k+1}. \quad (2.4)$$

Allora comunque presi  $k, j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |x_{k+j}(t) - x_k(t)| &\leq |x_{k+j}(t) - x_{k+j-1}(t)| + |x_{k+j-1}(t) - x_{k+j-2}(t)| + \dots \\ &\quad \dots + |x_{k+1}(t) - x_k(t)| \\ &\leq \frac{M}{L} \sum_{h=k+1}^{\infty} \frac{(\alpha L)^h}{h!} \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\max_{t \in I} |x_{k+j}(t) - x_k(t)| \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow \infty \text{ e per ogni } j.$$

Per il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme la successione  $(x_k)$  converge uniformemente in  $I$  e la funzione limite  $x$  è ivi continua.

Dalla definizione di  $(x_k)$  abbiamo

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_k(s)) \, ds \quad \text{per ogni } t \in I.$$

La convergenza uniforme di  $(x_k)$  a  $x$  in  $I$  assicura che  $f(\cdot, x_k(\cdot))$  converge uniformemente in  $I$  alla funzione  $f(\cdot, x(\cdot))$  (se ne lascia la verifica al lettore), per cui possiamo passare al limite sotto il segno di integrale, ottenendo:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) \, ds \quad \text{per ogni } t \in I.$$



Per il Lemma 2.1.1 la funzione  $x$  è soluzione del problema (P).

b) (Unicità) Sia ora  $z$  una qualunque soluzione del problema (P) in un intorno destro  $[t_0, t_0 + \delta]$  di  $t_0$ , con  $\delta \leq \alpha$  (analogamente si procede per un intorno sinistro). Stimiamo la differenza fra  $z$  e gli elementi della successione  $(x_k)$  costruita sopra. Per ogni  $t \in [t_0, t_0 + \delta]$

$$z(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, z(s)) ds.$$

Quindi,

$$|z(t) - x_0(t)| \leq M_1(t - t_0),$$

dove  $M_1$  è una limitazione di  $|f|$  su un compatto contenente il grafico di  $z|_{[t_0, t_0 + \delta]}$ . Detta  $L_1$  una costante di Lipschitz per  $f$  su un compatto contenente  $z|_{[t_0, t_0 + \delta]}$  e  $R$ , se procediamo in modo analogo a quanto fatto per stimare  $|x_2 - x_1|$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} |z(t) - x_1(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t (f(s, z(s)) - f(s, x_0(s))) ds \right| \leq L_1 \int_{t_0}^t |z(s) - x_0(s)| ds \\ &\leq M_1 L_1 \int_{t_0}^t |s - t_0| ds = \frac{1}{2} M_1 L_1 (t - t_0)^2. \end{aligned}$$

Iterando il procedimento otteniamo così

$$|z(t) - x_k(t)| \leq \frac{1}{(k+1)!} M_1 L_1^k (t - t_0)^{k+1} \quad \text{per ogni } t \in [t_0, t_0 + \delta].$$

Al tendere di  $k$  all'infinito risulta  $x(t) = z(t)$ .  $\square$

Il teorema precedente può essere sostanzialmente riformulato come segue:

TEOREMA 2.1.4 Sia  $f = f(t, x)$  localmente lipschitziana su  $D$  in  $x$  uniformemente rispetto a  $t$ . Allora il problema (P) ammette, in un opportuno intorno di  $t_0$ , una e una sola soluzione.

OSSERVAZIONE 2.1.5 [Unicità locale e globale] L'unicità di cui al teorema precedente è *locale*, nel senso che è ristretta alla considerazione dell'intorno  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ . A partire da ciò si può tuttavia ottenere facilmente un risultato di *unicità globale*. Più precisamente, dimostriamo che se  $x_1, x_2$  sono due soluzioni del problema (P) negli intervalli  $J_1$  e  $J_2$  rispettivamente, allora  $x_1$  e  $x_2$  coincidono su  $J := J_1 \cap J_2$ , e quindi è individuata un'"unica soluzione" su tutto l'intervallo  $J_1 \cup J_2$ . Poniamo

$$\bar{t} = \sup\{t \in J : t \geq t_0, x_1 = x_2 \text{ in } [t_0, t]\}$$

(per  $t \leq t_0$  si procede in modo analogo). Se  $\bar{t} = \sup J$  non vi è nulla da dimostrare. Altrimenti  $x_1$  e  $x_2$  sarebbero definite in un intorno destro di  $\bar{t}$  e coinciderebbero in  $\bar{t}$  (per continuità); per l'unicità asserita nel Teorema 2.1.3 (applicato con  $\bar{t}$  in luogo di  $t_0$ ) si avrebbe  $x_1 = x_2$  in un intorno destro di  $\bar{t}$ , contro la definizione di  $\bar{t}$ .

In modo differente l'unicità *globale* delle soluzioni può anche essere enunciata dicendo che due soluzioni dell'equazione  $x' = f(t, x)$  o hanno grafici disgiunti o coincidono.

Ai fini dell'esistenza di una soluzione del problema (P) la lipschitzianità di  $f$  non è necessaria. Vale infatti il seguente risultato (per la dimostrazione vedi, ad esempio, [13]).

TEOREMA 2.1.6 (PEANO) Sia  $R = R_{a,b}(t_0, x_0)$  come sopra. Allora:

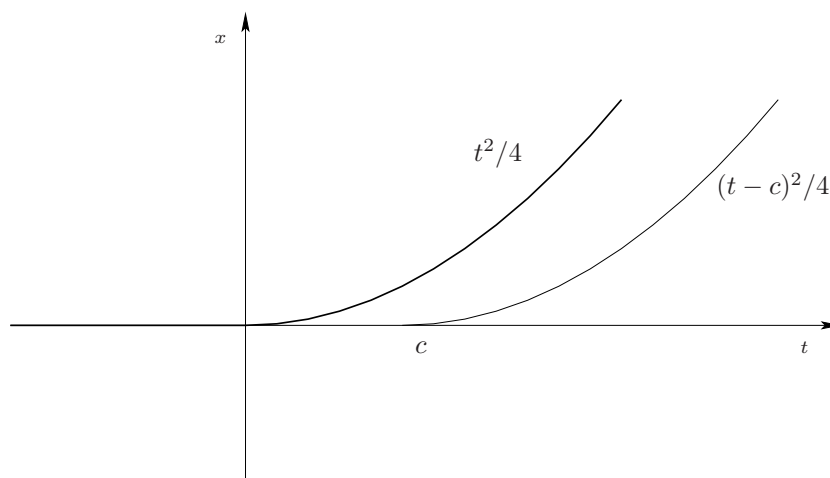


Figura 2.2 - Soluzioni distinte del problema di Cauchy  $x' = \sqrt{|x|}$ ,  $x(0) = 0$ .

il problema (P) ammette soluzione nell'intervallo  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , dove

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right),$$

essendo  $M$  una limitazione per  $|f|$  su  $R$ .

In assenza della condizione di lipschitzianità può venire a mancare l'unicità. Si consideri, ad esempio, la funzione :

$$f(x) = \sqrt{|x|},$$

che non è lipschitziana intorno all'origine. Il problema (P) con  $(t_0, x_0) = (0, 0)$  ha come soluzioni, oltre la funzione nulla, tutte quelle della seguente forma, al variare di  $c \geq 0$  (vedi Figura 2.2):

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(t-c)^2 & \text{se } t \geq c \\ 0 & \text{se } t \leq c \end{cases} \quad (2.5)$$

(analoghe soluzioni si ottengono utilizzando anche le funzioni  $-\frac{1}{4}(t+c)^2$  per  $c > 0$ ).

In vista degli sviluppi successivi è utile esplicitare il fatto che il valore  $\alpha$  relativo all'ampiezza dell'intervallo di esistenza del problema (P) garantita dal Teorema di Peano possa essere stimata uniformemente rispetto al punto  $(t_0, x_0)$  se questo varia in un compatto  $K$  in  $D$ . Più precisamente abbiamo il seguente risultato (si si veda anche il Lemma 2.5.4).

**COROLLARIO 2.1.7** *Se  $K \subseteq D$  è compatto, esiste  $\alpha > 0$  tale che per ogni  $(t_0, x_0) \in K$  il problema (P) ha una soluzione definita nell'intervallo  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ .*

*Dimostrazione.* È sufficiente osservare che il Teorema di Peano può essere applicato, per ogni  $(t_0, x_0) \in K$ , con  $a$  e  $b$  dipendenti soltanto da  $\text{dist}(K, \partial D) > 0$ .  $\square$

## 2.2 PROLUNGAMENTO DELLE SOLUZIONI

Come risulta evidente dall'esempio  $x' = f(t, x)$  con  $f(t, x) = x^2$  (vedi esercizi alla fine del paragrafo), anche se la funzione  $f$  è ovunque definita e regolare non è detto che le soluzioni della corrispondente equazione siano definite su tutto  $\mathbb{R}$ .

Vediamo ora alcuni risultati sulla prolungabilità delle soluzioni.

Sia  $D$  aperto di  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua. Data una soluzione  $x: J \rightarrow \mathbb{R}^n$  di (2.1), chiamiamo *prolungamento* di  $x$  ogni soluzione  $\hat{x}$  che sia definita su un intervallo  $\hat{J}$  strettamente contenente  $J$ . Se  $x$  non ammette prolungamenti allora diciamo che è definita su un intervallo *massimale* di esistenza.

Prima di enunciare il principale risultato sulla prolungabilità delle soluzioni conviene svolgere una semplice osservazione, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

### OSSERVAZIONE 2.2.1

a) Se  $x$  è soluzione di (2.1) in  $(a, b)$  ed esiste finito

$$\lim_{t \rightarrow b^-} x(t) = l, \quad \text{con } (b, l) \in D,$$

allora  $x$  può essere estesa in modo  $C^1$  in  $(a, b]$  e

$$x'(b) = f(b, x(b)),$$

cioè  $x$  è soluzione di (2.1) in  $(a, b]$ . (Si utilizzi il teorema del valor medio per ciascuna componente di  $x$ ).

b) Sia  $D$  aperto di  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua. Siano  $x_1$  e  $x_2$  soluzioni dell'equazione (2.1) negli intervalli  $(a, b]$  e  $[b, c)$ , rispettivamente. Se  $x_1(b) = x_2(b)$  allora la funzione

$$x = \begin{cases} x_1 & \text{in } (a, b], \\ x_2 & \text{in } [b, c) \end{cases}$$

è soluzione di (2.1) in  $(a, c)$ .

**TEOREMA 2.2.2 (PROLUNGAMENTO MASSIMALE)** *Sia  $D$  aperto di  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua. Ogni soluzione  $x$  di (2.1) ammette un prolungamento ad un intervallo massimale di esistenza  $(\omega_-, \omega_+)$ . Inoltre  $(t, x(t))$  "abbandona definitivamente" ogni compatto di  $D$  per  $t \rightarrow \omega_{\pm}$ , cioè*

*comunque preso  $K$  compatto contenuto in  $D$ , esiste un intorno  $U$  di  $\omega_+$  [e, analogamente, di  $\omega_-$ ] tale che*

$$(t, x(t)) \notin K \quad \text{per } t \in (\omega_-, \omega_+) \cap U.$$

Scriveremo sinteticamente questa proprietà come:

$$(t, x(t)) \rightarrow \partial D \quad \text{per } t \rightarrow \omega_{\pm} \tag{2.6}$$

**OSSERVAZIONE 2.2.3** In assenza di ipotesi di unicità per le soluzioni dei problemi di Cauchy il prolungamento massimale non è necessariamente unico. Si pensi all'equazione  $y' = \sqrt{|y|}$  e alle soluzioni (2.5), tutte definite su intervalli massimali e coincidenti su  $(-\infty, c]$ .

*Dimostrazione (del Teorema 2.2.2).* Sia  $x: J \rightarrow \mathbb{R}^n$  soluzione di (2.1). Occupiamoci del prolungamento a destra. Sia  $a$  un punto di  $J$  e  $b = \sup J$ . Se  $J$  è massimale allora deve essere  $b \notin J$ : infatti, in caso contrario, il problema di Cauchy con dato iniziale  $x(b)$  in  $b$  permetterebbe di estendere l'intervallo di esistenza, che pertanto non sarebbe massimale. Quindi se  $J$  è massimale (destro) allora è aperto a destra.

Se  $J$  non è un intervallo massimale (destro) allora possiamo supporre che  $x$  sia prolungabile almeno in  $b$ . Pertanto è lecito assumere che  $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

*Passo 1.* Sia  $K$  un qualunque compatto contenuto in  $D$  e contenente il grafico di  $x$ . In base al Corollario 2.1.7 esiste  $\alpha_K > 0$  tale che il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} z' = f(t, z) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

ha soluzione nell'intervallo  $[t_0 - \alpha_K, t_0 + \alpha_K]$  comunque preso  $(t_0, z_0) \in K$ . Scegliendo  $(t_0, z_0) = (b, x(b))$  possiamo prolungare  $x$  fino a  $b + \alpha_K$  (si ricordi l'Osservazione 2.2.1). Se  $(b + \alpha_K, x(b + \alpha_K)) \in K$  possiamo ulteriormente prolungare  $x$  fino a  $b + 2\alpha_K$ . Ripetendo il ragionamento un numero finito di volte si ottiene  $b_K$  tale che  $(b_K, x(b_K)) \notin K$ .

*Passo 2.* Sia  $(V_k)$  una successione crescente di aperti di  $D$  a chiusura compatta in  $D$ :

$$V_k \subseteq V_{k+1} \subset\subset D.$$

Supponiamo inoltre che  $V_1$  contenga il grafico di  $x$  e che  $\bigcup V_k$  esaurisca  $D$ :

$$(t, x(t)) \in V_1 \quad \text{per ogni } t \in [a, b]; \quad \bigcup V_k = D.$$

Per ricorrenza sia  $b_k = b_{\overline{V}_k}$  il valore costruito al passo precedente per  $K = \overline{V}_k$  a partire dal prolungamento ottenuto su  $[a, b_{k-1}]$ . Possiamo supporre che

- $(b_k)$  sia non decrescente;
- $(b_k)$  sia limitata superiormente (altrimenti si avrebbe un prolungamento ad  $[a, +\infty)$ , che è già massimale).

Allora  $(b_k)$  converge ad un valore reale  $\omega_+$  così che abbiamo ottenuto un prolungamento ad  $[a, \omega_+)$ . Mostriamo che tale prolungamento è massimale (destro). Se infatti così non fosse  $x$  sarebbe prolungabile in  $\omega_+$ , quindi per continuità si avrebbe:

$$(b_k, x(b_k)) \rightarrow (\omega_+, x(\omega_+)) \in D;$$

del resto, fissato  $N \in \mathbb{N}$ , risulta:

$$(b_k, x(b_k)) \notin \overline{V}_k \supseteq V_N \quad \text{per ogni } n \geq N;$$

quindi

$$(b_k, x(b_k)) \notin V_N \quad \text{per ogni } n \geq N,$$

da cui  $(\omega_+, x(\omega_+)) \notin V_N$ . Per l'arbitrarietà di  $N \in \mathbb{N}$  concludiamo che

$$(\omega_+, x(\omega_+)) \notin \bigcup_N V_N = D : \quad \text{assurdo.}$$

Per ora abbiamo dimostrato che è sempre possibile estendere  $x$  ad un intervallo massimale destro e che tale intervallo è aperto a destra.

*Passo 3.* Rimane da dimostrare che  $(t, x(t)) \rightarrow \partial D$  per  $t \rightarrow \omega_+$ .

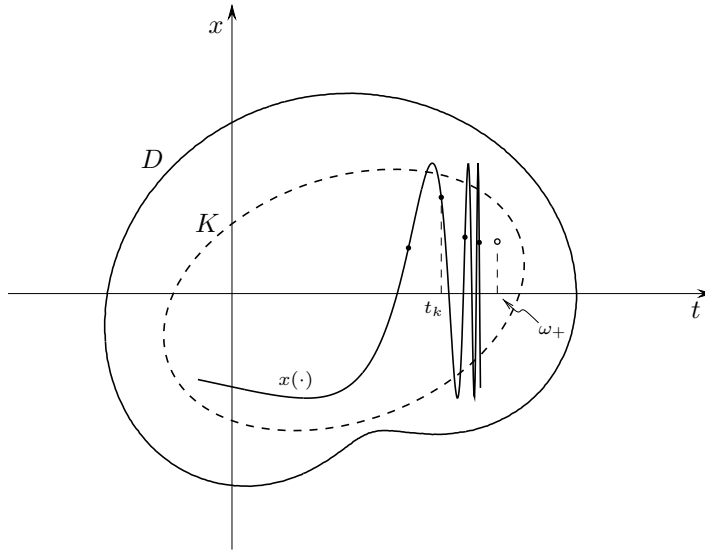


Figura 2.3 - La negazione che  $x(t) \rightarrow \partial D$  per  $t \rightarrow \omega_+$  porta ad un assurdo (vedi *Passo 3* della dimostrazione del Teorema 2.2.2).

Se  $\omega_+ = +\infty$  non c'è nulla da dimostrare; sia pertanto  $\omega_+ < +\infty$ . Per assurdo supponiamo che esista  $K$  compatto di  $D$  e una successione  $t_k \rightarrow \omega_+$  tali che:

$$(t_k, x(t_k)) \in K.$$

Assumiamo  $(t_k)$  strettamente crescente. Per la compattezza di  $K$  possiamo anche supporre che

$$(t_k, x(t_k)) \rightarrow (\omega_+, \bar{x}) \in K.$$

Passo fondamentale è ora dimostrare che non si ha solo  $x(t_k) \rightarrow \bar{x}$ , ma

$$\lim_{t \rightarrow \omega_+} x(t) = \bar{x}. \quad (2.7)$$

Dobbiamo pertanto escludere la possibile non esistenza del limite di  $x$  per  $t \rightarrow \omega_+$  (vedi Figura 2.3).

Sia  $B$  una palla di centro  $(\omega_+, \bar{x})$  e con chiusura tutta contenuta in  $D$ . Possiamo supporre che  $(t_k, x(t_k)) \in B$  per ogni  $k$ . Sia  $M = \max_{\bar{B}} |f|$ . Sia  $[t_k, t_k + \delta) \subseteq [t_k, \omega_+)$  un intorno destro di  $t_k$  in cui  $x(\cdot)$  ha grafico in  $\bar{B}$  (per  $\delta > 0$  sufficientemente piccolo questa condizione è verificata, poiché  $(t_k, x(t_k)) \in B$ ). Allora in tale intervallo

$$|x(\tau) - x(t_k)| \leq \int_{t_k}^{\tau} |f(s, x(s))| ds \leq M(\tau - t_k),$$

da cui

$$|x(\tau) - x(t_k)| \leq M(\omega_+ - t_k). \quad (2.8)$$

Se per un qualche  $k$ , e quindi definitivamente, fosse  $t_k + \delta = \omega_+$  avremmo la validità di (2.8) per ogni  $\tau \in [t_k, \omega_+)$ ; allora, per tali  $\tau$

$$\begin{aligned} |x(\tau) - \bar{x}| &\leq |x(\tau) - x(t_k)| + |x(t_k) - \bar{x}| \\ &\leq M(\omega_+ - t_k) + |x(t_k) - \bar{x}| \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

da cui la (2.7). Poichè per ottenere la (2.9) viene utilizzata solo la (2.8), definiamo direttamente

$$\omega_k = \sup\{t \in [t_k, \omega_+] : |x(\tau) - x(t_k)| \leq M(\omega_+ - t_k) \text{ per ogni } \tau \in [t_k, t]\}$$

e dimostriamo che  $\omega_k = \omega_+$  per  $k$  sufficientemente grande, ottenendo così la (2.7).

Per ogni  $t \in [t_k, \omega_k)$  è lecito applicare la disuguaglianza (2.9). Quindi possiamo affermare che

$$(t, x(t)) \in \bar{B} \quad \text{per ogni } t \in [t_k, \omega_k) \text{ per } k \text{ sufficientemente grande.} \quad (2.10)$$

Allora, per ogni  $k$  per il quale  $\omega_k < \omega_+$  (quindi, in particolare, risulta definito  $x(\omega_k)$ ) il grafico di  $x|_{[t_k, \omega_k]}$  è contenuto in  $\bar{B}$ , quindi

$$|x(\omega_k) - x(t_k)| \leq \int_{t_k}^{\omega_k} |f(s, x(s))| ds \leq M(\omega_k - t_k) < M(\omega_+ - t_k).$$

Pertanto esiste  $\bar{\varepsilon}$  tale che per ogni  $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$

$$|x(\omega_k + \varepsilon) - x(t_k)| < M(\omega_+ - t_k);$$

ciò è assurdo in base alla definizione di  $\omega_k$ .

Dall'esistenza del limite (2.7) concludiamo che  $x$  è prolungabile in  $\omega_+$  (si ricordi l'Osservazione 2.2.1 (a)): assurdo poichè al passo precedente è stato dimostrato che  $[a, \omega_+)$  è massimale destro.  $\square$

*Alcune conseguenze: condizioni per l'esistenza globale.* Supponiamo che  $D$  sia della forma  $I \times \Omega$ , con  $I$  intervallo aperto e  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $x: J \rightarrow \mathbb{R}^n$  una soluzione di (2.1); supponiamo che  $J$  sia un *intervallo massimale* di esistenza.

a) Se esiste un compatto  $Y$  di  $\Omega$  per il quale

$$x(t) \in Y \quad \text{per ogni } t \in J,$$

allora deve essere  $J = I$ : si ha cioè *esistenza globale*.

Infatti  $x(t)$ , che rimane confinato in  $Y$ , non può raggiungere  $\partial\Omega$ , per cui l'unico modo di soddisfare la condizione (2.6) è che  $J = I$ .

b) Sia  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . Se  $f$  è limitata allora  $J = I$  (esistenza globale).

Infatti, fissato  $t_0 \in I$ , per ogni  $t \in I$  si ha:

$$|x(t) - x(t_0)| \leq \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \leq M|t - t_0|. \quad (2.11)$$

Ancora, la condizione (2.6) dà  $J = I$  (vedi Figura 2.4).

c) Sia  $\Omega = \mathbb{R}$  ( $n = 1$ ) ed esistano due funzioni continue  $u_1, u_2: I \rightarrow \mathbb{R}$  tali che

$$u_1 \leq x \leq u_2 \quad \text{in } J. \quad (2.12)$$

Allora  $J = I$ .

Si noti che i casi (b) e (c) si possono ricondurre al punto (a) poichè le stime (2.11) e (2.12) assicurano che su ogni compatto di  $I$  la  $x$  rimane in un compatto di  $\Omega = \mathbb{R}^n$ .

**DEFINIZIONE 2.2.4** *In ipotesi di unicità per i problemi di Cauchy (P) indicheremo con  $x(\cdot, t_0, x_0)$  l'unica soluzione del problema (P), definita nel suo intervallo massimale di definizione.*

Se  $D$  è una striscia della forma  $I \times \mathbb{R}^n$  con  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo aperto, il fatto che  $x(\cdot, t_0, x_0)$  sia definita in tutto  $I$  comunque preso  $(t_0, y_0) \in D$  viene spesso espresso dicendo che vi è *esistenza globale* per l'equazione  $x' = f(t, x)$ .

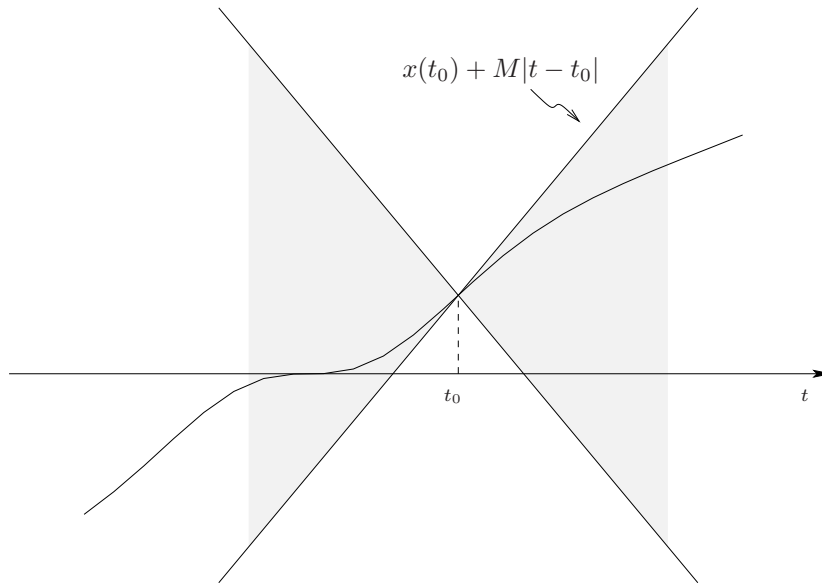


Figura 2.4 - Se la funzione  $f$  nell'equazione  $x' = f(t, x)$  è limitata, allora la soluzione è confinata nella regione  $|x - x_0| \leq M|t - t_0|$ .

### Esercizi

1. Si valuti la massima ampiezza garantita dal Teorema 2.1.3 per l'intervallo di definizione della soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

2. Si dimostri quanto affermato nell'Osservazione 2.2.1.

3. Sia  $f$  come sopra. Se  $f$  è limitata in  $D$ , ogni soluzione  $x$  in un intervallo  $(a, b)$  ammette limiti finiti

$$\lim_{t \rightarrow a^+} x(t) = x(a^+) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow b^-} x(t) = x(b^-).$$

Se inoltre  $f$  è o può essere definita in  $(b, x(b^-))$  in modo continuo, allora  $x$  è soluzione di (2.1) in  $(a, b]$ . Analogamente per l'estremo sinistro  $a$ .

4. Se  $D$  è della forma  $I \times \mathbb{R}^n$  con  $I$  intervallo e  $f$  è lipschitziana su tutto  $D$  nella seconda variabile, uniformemente rispetto alla prima, come può essere svolto, più rapidamente, il Passo 3 della dimostrazione del Teorema 2.2.2?

### 2.3 LEMMA DI GRONWALL

Il Lemma di Gronwall e le disuguaglianze differenziali di cui al successivo paragrafo sono strumenti che spesso permettono di ottenere stime *a priori* per le soluzioni di un'equazione differenziale; queste possono dare luogo a risultati di esistenza globale in connessione con il Teorema 2.2.2.

Ci sarà utile (per la dimostrazione del Lemma di Gronwall) premettere la tecnica risolutiva delle equazioni differenziali lineari del primo ordine, cioè della forma:

$$x' + p(t)x = q(t), \quad (2.13)$$

dove  $p, q$  sono funzioni continue su un intervallo  $I$ .

Sia  $y: J \rightarrow \mathbb{R}$  una soluzione. Detta  $P$  una primitiva di  $p$ , moltiplichiamo entrambi i membri dell'equazione per  $e^{P(t)}$  e osserviamo che così facendo il primo membro non è altro che  $\frac{d}{dt}(e^{P(t)}x(t))$ . Pertanto, passando agli integrali indefiniti:

$$e^{P(t)}x(t) = \int e^{P(t)}q(t) dt.$$

Concludiamo che la famiglia delle soluzioni di (2.13) è data da:

$$x(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)}q(t) dt.$$

In particolare, consideriamo il problema

$$\begin{cases} u'(t) = \beta(t)u(t) \\ u(a) = \alpha \end{cases}$$

dove  $\beta$  è una funzione continua su un intervallo  $I$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $a$  è un punto di  $I$ . Ricordiamo che la formulazione integrale di questo problema è:

$$u(t) = \alpha + \int_a^t \beta(s)u(s) ds. \quad (2.14)$$

In base a quanto precede, la soluzione è data da:

$$u(t) = \alpha e^{\int_a^t \beta(s) ds}. \quad (2.15)$$

Il Lemma seguente risponde alla domanda: se in (2.14) vale il segno di disuguaglianza, anziché di uguaglianza, lo stesso si riflette nella (2.15)?

LEMMA 2.3.1 (GRONWALL) *Sia  $I$  un dato intervallo e  $\beta \in C^0(I)$ , con  $\beta \geq 0$ . Sia  $a$  un punto di  $I$  e sia  $u \in C^0(I)$  una funzione per la quale esiste  $\alpha \in \mathbb{R}$  tale che*

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t \beta(s)u(s) ds \quad \text{per ogni } t \in I.$$

Allora:

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t \beta(s) ds} \quad \text{per ogni } t \in I, \text{ con } t \geq a.$$

*Dimostrazione.* Poniamo

$$R(t) = \int_a^t \beta(s)u(s) ds.$$

Allora (ricordiamo che  $\beta \geq 0$ )

$$R'(t) = \beta(t)u(t) \leq \beta(t)(\alpha + R(t)).$$



Applichiamo alla disuguaglianza  $R'(t) - \beta(t)R(t) \leq \alpha\beta(t)$  il ragionamento utilizzato poco sopra per le equazioni differenziali lineari del primo ordine. Sia  $B$  la primitiva di  $\beta$  definita da:

$$B(t) = \int_a^t \beta(s) ds.$$

Allora, moltiplicando per  $e^{-B(t)}$ , si ha:

$$\frac{d}{dt}(e^{-B(t)}R(t)) \leq \alpha\beta(t)e^{-B(t)}.$$

Integriamo ora fra  $a$  e  $t \geq a$ , tenendo conto che  $R(a) = 0$ :

$$e^{-B(t)}R(t) \leq -\alpha[e^{-B(s)}]_a^t = -\alpha(e^{-B(t)} - 1).$$

Concludiamo ricavando  $R(t) \leq -\alpha + \alpha e^{B(t)}$  e sostituendo tale stima nella disuguaglianza data come ipotesi.  $\square$

**OSSERVAZIONE 2.3.2** Se nel Lemma di Gronwall risulta  $\beta \leq 0$  allora la disuguaglianza  $u(t) \leq \alpha \exp(\int_a^t \beta(s) ds)$  vale per ogni  $t \in I$  con  $t \leq a$ , come si può verificare ripercorrendo la dimostrazione sopra esposta.

*Una stima dello scarto fra due soluzioni.* Sia  $D$  un aperto di  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione continua e localmente lipschitziana nella seconda variabile, uniformemente rispetto alla prima. Siano  $x_1, x_2: J \rightarrow \mathbb{R}^n$  due soluzioni dell'equazione  $x' = f(t, x)$  sull'intervallo  $J$ . Sia  $t_0$  un punto di  $J$ : vorremmo stimare la differenza fra i valori delle soluzioni in un istante  $t \geq t_0$  in funzione dello scarto  $|x_1(t_0) - x_2(t_0)|$ . Fissato  $T \in J$ , con  $T \geq t_0$ , sia  $L_T$  una costante di Lipschitz per  $f$  relativa ad un compatto di  $D$  contenente i grafici di  $x_1$  e  $x_2$  su  $[t_0, T]$ . Poiché

$$x_i(t) = x_i(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x_i(s)) ds \quad (i = 1, 2),$$

per ogni  $t \in [t_0, T]$  si ha

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(t_0) - x_2(t_0)| + L_T \int_{t_0}^t |x_1(s) - x_2(s)| ds.$$

Per il Lemma di Gronwall (con  $\alpha = |x_1(t_0) - x_2(t_0)|$  e  $\beta = L_T$ ):

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq |x_1(t_0) - x_2(t_0)|e^{L_T(t-t_0)}. \quad (2.16)$$

Questa disuguaglianza dà la stima cercata della differenza fra le due soluzioni in funzione della differenza fra i dati iniziali. Come applicazione immediata mostriamo un'efficace dimostrazione alternativa dell'unicità *globale*, rispetto a quanto già visto nell'Osservazione 2.1.5.

Siano  $D$  e  $f$  come sopra e siano  $x_i: J_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $i = 1, 2$ ) due soluzioni dell'equazione  $x' = f(t, x)$ . Se  $x_1(t_0) = x_2(t_0)$  per qualche  $t_0 \in J_1 \cap J_2$  allora  $x_1 = x_2$  su  $J_1 \cap J_2$  (e quindi è individuata un'"unica soluzione", definita su tutto  $J_1 \cup J_2$ ).

Infatti, fissato  $t_0 \in J := J_1 \cap J_2$ , in ogni intervallo  $[t_0, T] \subseteq J$  vale la disuguaglianza (2.16), quindi  $|x_1(t) - x_2(t)| = 0$  poiché  $|x_1(t_0) - x_2(t_0)| = 0$ . Per i valori di  $t \leq t_0$  si procede in modo analogo.

## 2.4 DISUGUAGLIANZE DIFFERENZIALI

Il teorema che ora enunciamo è una formalizzazione del fatto che date due funzioni (scalari)  $x$  e  $u$ , se negli eventuali punti di intersezione dei grafici la pendenza della prima è sempre inferiore a quella della seconda, allora l'informazione che  $x \leq u$  in un istante  $a$  permette di concludere che  $x \leq u$  per tutti i tempi successivi  $t \geq a$ .

**TEOREMA 2.4.1 (CONFRONTO)** *Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto. Sia  $\omega: D \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e localmente lipschitziana nella seconda variabile, uniformemente rispetto alla prima<sup>12</sup>. Siano  $x, u: J \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni di classe  $C^1$  con grafico contenuto in  $D$  e tali che*

$$x'(t) \leq \omega(t, x(t)), \quad u'(t) = \omega(t, u(t))$$

per ogni  $t \in J$ . Sia  $a \in J$  tale che

$$x(a) \leq u(a).$$

Allora

$$x(t) \leq u(t) \quad \text{per ogni } t \in J \text{ con } t \geq a.$$

*Dimostrazione.* Supponiamo che in  $J$  esista  $\bar{t} > a$  con  $x(\bar{t}) > u(\bar{t})$ . Sia

$$t_0 = \sup\{t \in [a, \bar{t}] : x(t) \leq u(t)\}.$$

Deve essere (teorema permanenza del segno)  $x(t_0) = u(t_0)$  e  $t_0 < \bar{t}$ . Inoltre:

$$x(t) > u(t) \quad \text{per } t_0 < t \leq \bar{t}.$$

In  $[t_0, \bar{t}]$  risulta:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t x'(s) \, ds \leq x(t_0) + \int_{t_0}^t \omega(s, x(s)) \, ds,$$

e

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t \omega(s, u(s)) \, ds.$$

Sottraendo questa uguaglianza alla disuguaglianza precedente si ha:

$$x(t) - u(t) \leq x(t_0) - u(t_0) + \int_{t_0}^t (\omega(s, x(s)) - \omega(s, u(s))) \, ds.$$

Se  $K$  è un compatto di  $D$  contenente i grafici di  $x, u|_{[t_0, \bar{t}]}$  e  $L_K$  è una costante di Lipschitz per  $\omega$  in  $K$ , allora:

$$x(t) - u(t) \leq L_K \int_{t_0}^t |x(s) - u(s)| \, ds = L_K \int_{t_0}^t (x(s) - u(s)) \, ds$$

(notiamo la necessità di lavorare in un intervallo in cui  $x(t) - u(t) \geq 0$ ). Per il Lemma di Gronwall concludiamo che ( $\alpha = 0$ )

$$x(t) - u(t) \leq 0.$$

Ciò è assurdo.  $\square$

<sup>12</sup>Questo risultato vale in realtà, più in generale, nell'ipotesi che per l'equazione differenziale  $u' = \omega(t, u)$  si abbia unicità dei problemi di Cauchy, senza necessariamente richiedere che  $\omega$  soddisfi l'ipotesi di lipschitzianità (vedi, ad esempio, [8]).

OSSERVAZIONE 2.4.2 Risultati analoghi a quello enunciato si ottengono invertendo opportunamente le disuguaglianze. Ad esempio, se  $x(a) \geq u(a)$  deve essere  $x(t) \geq u(t)$  per  $t \leq a$ ; oppure, sempre nell'ipotesi  $x(a) \geq u(a)$ , se  $x'(t) \geq \omega(t, x(t))$  allora  $x(t) \geq u(t)$  per  $t \geq a$ .

Come applicazione dimostriamo l'esistenza globale per le soluzioni del sistema di Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} x' = (\alpha - \beta y)x \\ y' = (-\gamma + \delta x)y \end{cases} \quad (2.17)$$

Sia  $(x(\cdot), y(\cdot)) : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  una soluzione, con  $J$  intervallo massimale di esistenza. Come si vedrà più avanti, ed è immediatamente verificabile, poichè le equazioni sono *autonome*, cioè in esse non compare esplicitamente il tempo  $t$ , la soluzione del problema ai valori iniziali con dato in  $t_0$  può essere ottenuta per traslazione temporale dalla soluzione che assume lo stesso dato al tempo 0. Pertanto supponiamo  $0 \in J$  e poniamo:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

È facile vedere che se  $y_0 = 0$  e  $x_0 \neq 0$  allora la funzione  $y \equiv 0$  è soluzione della seconda equazione, mentre la prima fornisce:

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t}.$$

Analogamente se  $x_0 = 0$  e  $y_0 \neq 0$ .

Assumiamo ora (caso di interesse modellistico) che  $x_0 > 0$  e  $y_0 > 0$ . Per unicità deve allora essere  $x > 0$  e  $y > 0$  in tutto  $J$ . Allora la prima delle due equazioni dà  $x' \leq \alpha x$ ; se  $u$  è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \alpha u(t), \\ u(0) = x_0, \end{cases}$$

cioè  $u(t) = x_0 e^{\alpha t}$ , per il Teorema del confronto deduciamo che

$$x(t) \leq x_0 e^{\alpha t} \quad \text{per ogni } t > 0 \text{ (} t \in J \text{)}.$$

Di conseguenza la seconda delle due equazioni di Lotka-Volterra dà:

$$y'(t) \leq \phi(t)y(t) \quad \text{per ogni } t \in J,$$

dove si è posto  $\phi(t) = -\gamma + \delta x_0 e^{\alpha t}$ . Applichiamo allora il confronto utilizzando la soluzione  $v$  del problema

$$\begin{cases} v'(t) = \phi(t)v(t) \\ v(0) = y_0. \end{cases}$$

Notiamo che  $v$  è definita su tutto  $\mathbb{R}$  (l'equazione è lineare del primo ordine, con coefficienti ovunque definiti). Risulta pertanto:

$$y(t) \leq v(t) \quad \text{per ogni } t > 0 \text{ (} t \in J \text{)}.$$

Le limitazioni così ottenute per  $x(t)$  e  $y(t)$  assicurano, in base al Teorema 2.2.2, l'esistenza della soluzione per tutti i tempi  $t > 0$ . Un ragionamento analogo può essere svolto per dimostrare l'esistenza globale per i tempi negativi (si inizi stimando la  $y$  mediante un'esponenziale).

COROLLARIO 2.4.3 Sia  $D = I \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$  con  $I$  intervallo aperto e sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  continua soddisfacente la seguente condizione:

$$|f(t, x)| \leq \varphi(t) + \psi(t)|x| \quad \text{per ogni } (t, x) \in D,$$

per opportune funzioni  $\varphi$  e  $\psi$  continue e non negative su  $I$ . Allora l'equazione  $x' = f(t, x)$  ha esistenza globale.

*Dimostrazione.* Sia  $x: J \rightarrow \mathbb{R}$  una soluzione dell'equazione  $x' = f(t, x)$ , con  $J$  intervallo massimale. Fissato  $t_0 \in J$  diamo limitazioni per  $x(t)$  per  $t \geq t_0$ .

Per ipotesi:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \leq \varphi(t) + \psi(t)|x(t)|.$$

Sia  $u$  la soluzione del problema:

$$\begin{cases} u'(t) = \varphi(t) + \psi(t)|u(t)| \\ u(t_0) = |x(t_0)|. \end{cases}$$

Notiamo che  $u(t) \geq 0$  per ogni  $t \geq t_0$  poiché  $u(t_0) \geq 0$  e  $u'(t) \geq 0$ ; allora  $u$  soddisfa, per  $t \geq t_0$ , un'equazione differenziale lineare del primo ordine (infatti  $u' = \varphi + \psi u$ ), per cui risulta definita per ogni  $t \in I$  con  $t \geq t_0$ .

Applichiamo ora il Teorema di confronto 2.4.1 con  $\omega(t, x) = \varphi(t) + \psi(t)|x|$ ; dal momento che  $x(t_0) \leq u(t_0)$ , abbiamo:

$$x(t) \leq u(t) \quad \text{per ogni } t \geq t_0.$$

In modo analogo, per avere una stima dal basso osserviamo che

$$x'(t) = f(t, x(t)) \geq -\varphi(t) - \psi(t)|x(t)|;$$

consideriamo poi la soluzione  $v$  del problema

$$\begin{cases} v'(t) = -\varphi(t) - \psi(t)|v(t)| \\ v(t_0) = -|x(t_0)|. \end{cases}$$

La funzione  $v$  risulta non positiva per  $t \geq t_0$ , quindi risolve un'equazione differenziale lineare del primo ordine per la quale vi è esistenza globale. Inoltre, per il Teorema del confronto risulta:

$$x(t) \geq v(t) \quad \text{per ogni } t \geq t_0.$$

Il grafico di  $x$  è quindi confinato fra quelli di  $u$  e  $v$ , per cui abbiamo  $J = I$  (si ricordino i risultati sull'esistenza globale discussi dopo il Teorema 2.2.2).  $\square$

**OSSERVAZIONE 2.4.4** Il corollario ora considerato ha portata più generale, valendo in realtà anche per sistemi di equazioni (e non soltanto per incognite scalari), con il medesimo enunciato (ora  $D = I \times \mathbb{R}^n$ ). Una dimostrazione può essere ottenuta mediante il Lemma di Gronwall come segue.

Sia  $x: J \rightarrow \mathbb{R}^n$  una soluzione, con  $J$  intervallo massimale, e sia  $t_0 \in J$ . Occupiamoci dei tempi  $t \geq t_0$ . Risulta:

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x(t_0)| + \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \\ &\leq |x(t_0)| + \int_{t_0}^t [\varphi(s) + \psi(s)|x(s)|] ds \end{aligned}$$

Detto  $b$  l'estremo destro di  $I$ , fissiamo  $\bar{t} \in (t_0, b)$ . Dalla disuguaglianza precedente abbiamo subito, per ogni  $t \in J \cap [t_0, \bar{t}]$ :

$$|x(t)| \leq \alpha + M \int_{t_0}^t |x(s)| ds,$$

dove

$$\alpha = |x(t_0)| + (\bar{t} - t_0) \max_{[t_0, \bar{t}]} \varphi, \quad M = \max_{[t_0, \bar{t}]} \psi.$$

Per il Lemma di Gronwall

$$|x(t)| \leq \alpha e^{M(t-t_0)} \leq \alpha e^{M(\bar{t}-t_0)}$$

per ogni  $t \in J \cap [t_0, \bar{t}]$ . Ne segue che la soluzione  $x$  rimane in un compatto di  $\mathbb{R}^n$  su  $J \cap [t_0, \bar{t}]$ , per cui  $J$  deve contenere  $[t_0, \bar{t}]$  (si ricordino i risultati sull'esistenza globale discussi dopo il Teorema 2.2.2).

OSSERVAZIONE 2.4.5 Il Corollario 2.4.3, nella forma estesa di cui all'osservazione precedente, ha una notevole applicazione al caso dei *sistemi lineari*:

$$x' = A(t)x + b(t),$$

con  $A$  matrice  $n \times n$  di funzioni continue su un intervallo  $I$  e  $b: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua.

## 2.5 DIPENDENZA DELLE SOLUZIONI DAI DATI

Usualmente un problema ai valori iniziali che modella un fenomeno fisico-naturale, economico, sociale, ecc. implica, implicitamente o esplicitamente, un'approssimazione dei dati 'reali': ad esempio nel processo stesso di schematizzazione e nella considerazione degli eventuali parametri sperimentalmente misurati che compaiono nel modello. Diventa pertanto naturale indagare come la soluzione risente di una piccola variazione nei 'dati': relativamente al problema  $(P)$  (pag. 23), ci riferiamo alla dipendenza della soluzione dalla funzione  $f$  e dal dato iniziale  $(t_0, x_0)$ . È doveroso mettere in evidenza che lo studio della dipendenza della soluzione dai dati non è comunque dettato solamente da motivazioni modellistiche, ma costituisce anche dal punto di vista teorico un'istanza di estrema rilevanza: basti pensare all'importanza dei procedimenti di approssimazione nella pratica matematica.

Nel risultato che segue si dimostra che la convergenza dei campi vettoriali corrispondenti a una successione di equazioni differenziali e la convergenza dei dati iniziali assicura la convergenza delle soluzioni.

TEOREMA 2.5.1 (DIPENDENZA CONTINUA) Sia  $(f_j)_j$  una successione di funzioni continue  $D \rightarrow \mathbb{R}^n$  e sia  $((t_j, x_j))$  una successione di punti di  $D$ . Supponiamo esistano

$$f_0: D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t_0, x_0) \in D$$

tali che

- i)  $f_j \rightarrow f_0$  uniformemente sui compatti di  $D$ ;
- ii)  $(t_j, x_j) \rightarrow (t_0, x_0)$
- iii) la funzione  $f_0$  è localmente lipschitziana in  $D$ .

Sia  $\phi_0$  la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f_0(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

e supponiamo sia definita su un intervallo  $[a, b]$ .

Sia  $\phi_j$  una soluzione del problema

$$\begin{cases} x' = f_j(t, x) \\ x(t_j) = x_j. \end{cases}$$

Allora per  $j$  sufficientemente grande  $\phi_j$  può essere definita su  $[a, b]$  e  $\phi_j \rightarrow \phi_0$  uniformemente in  $[a, b]$ .

OSSERVAZIONE 2.5.2 Il teorema vale in realtà nell'ipotesi che il problema che risolve  $\phi_0$  abbia unicità, indipendentemente dall'ipotesi di lipschitzianità (vedi, ad esempio, [8], Lemma 3.1, pag. 24).

OSSERVAZIONE 2.5.3 Si notino i casi particolari in cui la successione  $(f_j)$  o i punti  $(t_j, x_j)$  non dipendano da  $n$ .

Alla dimostrazione del teorema premettiamo un lemma, che precisa quanto già contenuto nel Corollario 2.1.7, mettendo in evidenza l'uniformità dell'ampiezza dell'intervallo di esistenza in presenza di una limitazione uniforme per  $f$ ; ciò vale per ogni soluzione, indipendentemente dall'ipotesi di unicità o della specifica costruzione considerata per dimostrare l'esistenza di una soluzione.

LEMMA 2.5.4 Siano  $K$  un compatto e  $V$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  tali che

$$K \subseteq V \subset\subset D.$$

Sia  $M > 0$ . Esiste allora  $\alpha > 0$  tale che, comunque presa  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua e comunque preso  $(t_0, x_0) \in K$ , se  $|f| \leq M$  su  $\bar{V}$  e  $x: J \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una soluzione di

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.18)$$

con  $J$  intervallo massimale, allora  $J \supseteq [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$  e il grafico di  $x|_{[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]}$  è contenuto in  $V$ .

*Dimostrazione.* Chiaramente esistono  $a, b > 0$  dipendenti soltanto da  $d(K, \partial V)$ , tali che

$$R := R_{a,b}(t_0, y_0) := \{(t, y) : |t - t_0| < a, |y - x_0| < b\} \subseteq V$$

comunque preso  $(t_0, x_0) \in K$ . Sia  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua e tale che  $|f| \leq M$  su  $\bar{V}$ . Mostriamo che se  $x: J \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una soluzione di (2.18), con  $J = (\omega_-, \omega_+)$  intervallo massimale di esistenza, allora  $J \supseteq [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ , con

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

(e pertanto  $\alpha$  dipende soltanto da  $K, V$  e  $M$ ). Occupiamoci dell'intervallo  $[t_0, t_0 + \alpha]$  (analogamente si procede per  $[t_0 - \alpha, t_0]$ ).

Sia

$$\bar{t} = \sup\{t \in [t_0, \omega_+) : \forall \tau \in [t_0, t] (\tau, x(\tau)) \in R_{a,b}(t_0, x_0)\}.$$

Se fosse  $\bar{t} = \omega_+$  allora il grafico di  $x$  in  $[t_0, \omega_+)$  sarebbe tutto contenuto in  $R$ , che è un compatto di  $D$ : ciò è assurdo. Pertanto  $\bar{t} < \omega_+$ . Mostriamo che  $t_0 + \alpha \leq \bar{t}$ . Supponiamo, per assurdo, che  $\bar{t} < t_0 + \alpha$ . Allora deve essere (vedi Figura 2.5(b))

$$|x(\bar{t}) - x_0| = b;$$

ma per ogni  $t \in [t_0, \bar{t}]$  risulta  $(t, x(t)) \in R_{a,b}(t_0, x_0)$ , per cui  $|f(t, x(t))| \leq M$  e

$$b = |x(\bar{t}) - x_0| \leq \int_{t_0}^{\bar{t}} |f(s, x(s))| ds \leq M|\bar{t} - t_0| < M\alpha \leq b.$$

Allora deve essere  $\bar{t} \geq t_0 + \alpha$  e quindi, essendo  $\omega_+ > \bar{t}$ , anche  $\omega_+ > t_0 + \alpha$ .  $\square$

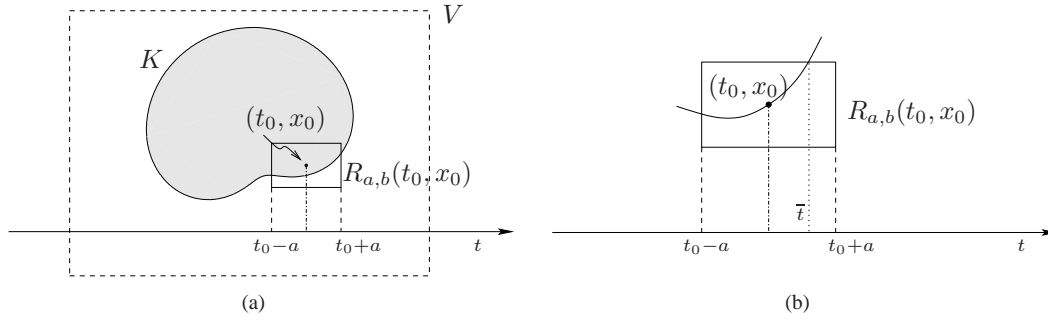


Figura 2.5 - Dimostrazione del teorema di dipendenza continua

*Dimostrazione.* (Teorema di dipendenza continua). Siano  $V$  e  $V'$  aperti di  $D$ , con

$$\text{graf } \phi_0 \Big|_{[a,b]} \subseteq V' \subset\subset V \subset\subset D.$$

Per (ii) possiamo supporre

$$(t_j, x_j) \in V' \quad \text{per ogni } j.$$

Poiché su  $\bar{V}$  risulta, in base all'ipotesi (i),

$$|f_j| \leq |f_j - f_0| + |f_0| \leq \max_{\bar{V}} |f_j - f_0| + \max_{\bar{V}} |f_0| \rightarrow \max_{\bar{V}} |f_0|,$$

posto  $M = 1 + \max_{\bar{V}} |f_0|$  possiamo supporre che

$$|f_j| \leq M \quad \text{in } \bar{V} \text{ per ogni } j.$$

Applichiamo il lemma precedente con  $K = \bar{V}'$ : poiché  $M$  dà una maggiorazione comune ad ogni  $|f_j|$ , esiste  $\alpha > 0$  tale che

$$\begin{aligned} \phi_j \text{ è definita in } [t_j - \alpha, t_j + \alpha] \text{ per ogni } j \\ \text{graf } \phi_j \Big|_{[t_j - \alpha, t_j + \alpha]} \text{ è contenuto in } V \text{ per ogni } j. \end{aligned}$$

A motivo della convergenza di  $t_j$  a  $t_0$

$$[t_j - \alpha, t_j + \alpha] \supseteq [t_0 - \frac{\alpha}{2}, t_0 + \frac{\alpha}{2}] \quad \text{per } j \text{ sufficientemente grande.}$$

Mostriamo ora la convergenza uniforme  $\phi_j \rightarrow \phi_0$  su tutto  $[t_0 - \alpha/2, t_0 + \alpha/2]$ . Occupiamoci di  $[t_0, t_0 + \alpha/2]$  (analogamente si procede su  $[t_0 - \alpha/2, t_0]$ ). In tale intervallo abbiamo:

$$\begin{aligned} \phi_j(t) - \phi_0(t) &= x_j - x_0 + \int_{t_j}^t f_j(s, \phi_j(s)) ds - \int_{t_0}^t f_0(s, \phi_0(s)) ds \\ &= x_j - x_0 + \int_{t_j}^{t_0} f_j(s, \phi_j(s)) ds + \int_{t_0}^t [f_j(s, \phi_j(s)) - f_0(s, \phi_0(s))] ds \end{aligned}$$

da cui

$$|\phi_j(t) - \phi_0(t)| \leq |x_j - x_0| + M|t_0 - t_j| + \int_{t_0}^{t_0 + \alpha/2} |f_j(s, \phi_j(s)) - f_0(s, \phi_0(s))| ds$$

$$+ \int_{t_0}^t |f_0(s, \phi_j(s)) - f_0(s, \phi_0(s))| ds.$$

Per la convergenza uniforme di  $f_j$  a  $f_0$  in  $V$  (in cui stanno i grafici di  $\phi_j$ ), risulta:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_0+\alpha/2} |f_j(s, \phi_j(s)) - f_0(s, \phi_j(s))| ds \\ & \leq \frac{\alpha}{2} \max_V |f_j - f_0| := \sigma_j \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Inoltre, per la locale lipschitzianità di  $f_0$  su  $V$ :

$$\int_{t_0}^t |f_0(s, \phi_j(s)) - f_0(s, \phi_0(s))| ds \leq L_V \int_{t_0}^t |\phi_j(s) - \phi_0(s)| ds,$$

con  $L_V$  costante di Lipschitz per  $f_0$  su  $V$ . Allora

$$|\phi_j(t) - \phi_0(t)| \leq \alpha_j + L_V \int_{t_0}^t |\phi_j(s) - \phi_0(s)| ds,$$

con

$$\alpha_j = |x_j - x_0| + M|t_j - t_0| + \sigma_j \rightarrow 0.$$

Per il Lemma di Gronwall:

$$|\phi_j(t) - \phi_0(t)| \leq \alpha_j e^{L_V(t-t_0)} \leq \alpha_j e^{L_V \alpha/2} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Quindi  $\phi_j \rightarrow \phi_0$  uniformemente in  $[t_0, t_0 + \alpha/2]$ .

Il procedimento seguito per dimostrare che per  $j$  sufficientemente grande le funzioni  $\phi_j$  sono definite in  $[t_0 - \alpha/2, t_0 + \alpha/2]$  e che su tale intervallo convergono uniformemente a  $\phi_0$  può essere ripetuto a partire dagli estremi  $t_0 \pm \alpha/2$ : l'ampiezza  $\alpha$  è infatti indipendente dal punto iniziale considerato. Allora, con un numero finito di passi si ottiene quanto asserito.  $\square$

Dal Teorema precedente si può ricavare con facilità il seguente risultato.

Sia  $F$  un aperto di  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  e  $f: F \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione continua. Si considerino i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Supponiamo che per ogni  $\lambda$  la funzione  $f(\cdot, \cdot, \lambda)$  sia localmente lipschitziana (nella seconda variabile, uniformemente rispetto alla prima).<sup>13</sup> Pertanto il problema (2.19) ammette soluzione unica, che indichiamo con

$$x(\cdot, t_0, x_0, \lambda)$$

Sia  $(\omega_-(t_0, x_0, \lambda), \omega_+(t_0, x_0, \lambda))$  il suo intervallo massimale di esistenza.

**TEOREMA 2.5.5** *La funzione  $\omega_-(t_0, x_0, \lambda)$  [ $\omega_+(t_0, x_0, \lambda)$ ] è semicontinua superiormente [inferiormente], l'insieme*

$$E = \{(t, t_0, x_0, \lambda) : (t_0, x_0, \lambda) \in F, \omega_-(t_0, x_0, \lambda) < t < \omega_+(t_0, x_0, \lambda)\}$$

<sup>13</sup>In realtà, come per il Teorema di dipendenza continua, sarebbe sufficiente l'ipotesi che i problemi (2.19) abbiano unicità.



è aperto e la funzione

$$x: (t, t_0, x_0, \lambda) \mapsto x(t, t_0, x_0, \lambda)$$

è continua in  $E$ .

La dimostrazione utilizza la continuità (uniforme) garantita dal Teorema 2.5.1 rispetto alle variabili  $(t_0, x_0, \lambda)$ : assieme alla continuità in  $t$  si ottiene la continuità di  $(t, t_0, x_0, \lambda) \mapsto x(t, t_0, x_0, \lambda)$ . Il fatto che  $E$  sia aperto discende dalla semicontinuità delle funzioni  $\omega_-$  e  $\omega_+$  (per questa dimostrazione si veda [10], Theorem 2.1 pag. 94 e [8], Capitolo 1, Theorem 3.4 e Theorem 3.1).

**OSSERVAZIONE 2.5.6** Il teorema precedente contiene, in particolare, la seguente versione del Teorema 2.5.1. Dati  $t_0, x_0$  e  $\lambda_0$ , se  $[a, b]$  è un intervallo contenuto in  $(\omega_-(t_0, x_0, \lambda_0), \omega_+(t_0, x_0, \lambda_0))$ , la semicontinuità di  $\omega_\pm$  assicura l'esistenza di un intorno  $U$  di  $(t_0, x_0, \lambda_0)$  tale che  $y(\cdot, \tau, z, \lambda)$  è definita almeno in  $[a, b]$  per ogni  $(\tau, z, \lambda) \in U$ ; inoltre, potendosi chiaramente supporre  $U$  chiuso, la continuità (uniforme) di  $x$  su  $[a, b] \times U$  dà:

$$\lim_{(\tau, z, \lambda) \rightarrow (t_0, y_0, \lambda_0)} x(t, \tau, z, \lambda) = x(t, t_0, y_0, \lambda_0) \quad \text{uniformemente per } t \in [a, b].$$

**OSSERVAZIONE 2.5.7** La regolarità della funzione  $x(t, t_0, x_0, \lambda)$  di cui al Teorema 2.5.5 dipende da quella della funzione  $f$  non solo a livello di continuità; ad esempio, la differenziabilità continua di  $f$  assicura la differenziabilità continua di  $x(t, t_0, x_0, \lambda)$  (si veda, ad esempio, [8], Th. 3.3).

*Dipendenza continua e stabilità* Consideriamo il caso in cui l'equazione differenziale  $x' = f(t, x)$  presenti la funzione  $f$  definita su tutto  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Supponiamo inoltre di essere in ipotesi di unicità per i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

e indichiamone con  $x(\cdot, t_0, x_0)$  la soluzione. Supponiamo inoltre che la funzione nulla sia soluzione.

Dati comunque  $t_0 \in \mathbb{R}$  e  $T > 0$  applichiamo i risultati visti sulla dipendenza continua all'intervallo  $[t_0, t_0 + T]$ , al variare del dato iniziale  $x_0$  (si ricordi, in particolare, l'Osservazione 2.5.6). Esiste allora un valore  $\delta(T) > 0$  tale che se  $|x_0| < \delta(T)$  la soluzione  $x(\cdot, t_0, x_0)$  è definita su tutto  $[t_0, t_0 + T]$ . Inoltre  $x(\cdot, t_0, x_0)$  converge uniformemente alla funzione nulla (che è la soluzione corrispondente al dato  $(t_0, 0)$ ) per  $x_0 \rightarrow 0$ . Quindi (vedi Figura 2.6), fissati  $t_0$  e  $T$ :

per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta(T, \varepsilon) > 0$  tale che se  $|x_0| < \delta(T, \varepsilon)$  allora la soluzione  $x(\cdot, t_0, x_0)$  è definita su tutto  $[t_0, t_0 + T]$  e  $|x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$  per ogni  $t \in [t_0, t_0 + T]$ .

È istruttivo verificare questo fatto nel caso dell'equazione

$$x' = x^2.$$

Sappiamo che la soluzione con dato  $x_0 \neq 0$  per  $t_0 = 0$  è data da:

$$x(t, 0, x_0) = \frac{1}{(1/x_0) - t}.$$

Dati  $\varepsilon > 0$  e  $T > 0$  abbiamo esistenza su  $[0, T]$  se  $x_0 < 1/T$ , mentre la condizione  $|x(t, 0, x_0)| < \varepsilon$  per ogni  $t \in [0, T]$  è verificata se  $|x_0| < \delta$ , con  $\delta$  tale che

$$\frac{1}{(1/\delta) - T} < \varepsilon, \quad \text{cioè } \delta < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} + T}.$$

Al crescere di  $T$  o al decrescere di  $\varepsilon$  l'ampiezza  $\delta$  dell'intorno di 0 in cui prendere il dato iniziale per avere una soluzione vicina alla soluzione nulla a meno di  $\varepsilon$  diminuisce e tende a zero. Quindi per l'equazione  $x' = x^2$  non è possibile generalizzare il ragionamento precedente all'intervallo  $[0, +\infty)$ . Si cerchi di visualizzare la situazione in un grafico.

La dipendenza continua dai dati iniziali su intervalli illimitati è una proprietà molto rilevante su cui torneremo: la cosiddetta proprietà di *stabilità*.

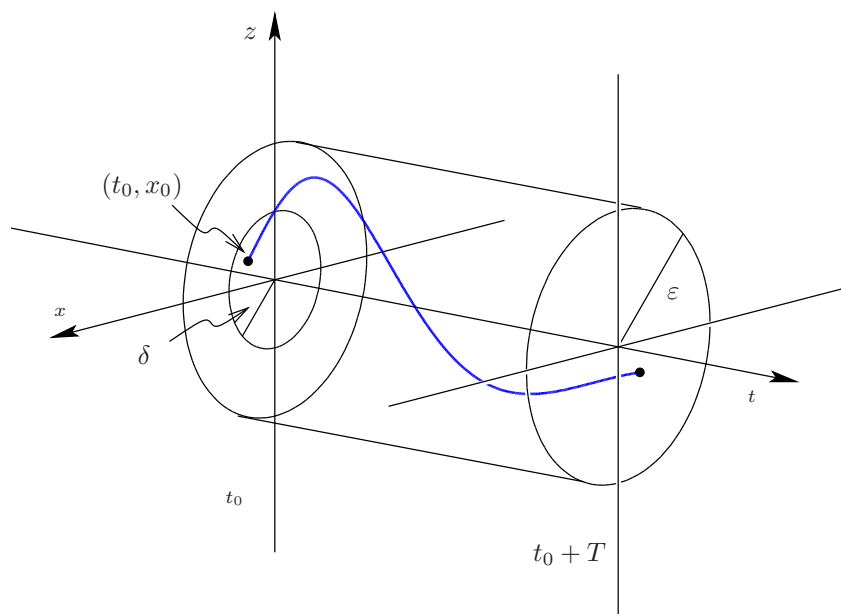


Figura 2.6 - Dipendenza continua dal dato iniziale  $y_0$

## 2.6 SISTEMI AUTONOMI: GENERALITÀ

Consideriamo un sistema autonomo di equazioni differenziali:

$$x' = f(x) \quad \text{con } \Omega \text{ aperto di } \mathbb{R}^n \text{ e } f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ continua} \quad (2.20)$$

(il campo vettoriale  $f$  non dipende dalla variabile temporale (vedi pag. 20)). La prima proprietà da mettere in evidenza per un sistema siffatto è la seguente:

*Se  $x: J \rightarrow \Omega$  è una soluzione, allora tale è anche ogni sua traslazione temporale  $x_\tau(t) := x(t-\tau)$  (per  $t \in J + \tau$ ).*

(Abbiamo già incontrato questa caratteristica dei sistemi autonomi nel § 1.1 studiando l'equazione logistica). Infatti:

$$x'_\tau(t) = x'(t-\tau) = f(x(t-\tau)) = f(x_\tau(t)).$$

Ricordiamo che, secondo la Definizione 2.2.4, se  $f$  è tale da assicurare l'unicità per i corrispondenti problemi di Cauchy, con  $x(\cdot, t_0, x_0)$  indichiamo la soluzione del problema di Cauchy con dato  $x_0$  in  $t_0$ , definita nel suo intervallo massimale di esistenza. Allora la proprietà ora dimostrata implica che

$$x(t, t_0, x_0) = x(t - t_0, 0, x_0). \quad (2.21)$$

Pertanto, per i sistemi autonomi è sufficiente considerare la funzione  $x(t, 0, x_0)$ , cioè considerare, per ogni  $x_0 \in \Omega$ , la soluzione per la quale  $x(0) = x_0$ . Indichiamo con  $(\omega_-(x_0), \omega_+(x_0))$  il suo intervallo massimale di esistenza.

**DEFINIZIONE 2.6.1** La funzione  $\varphi$  definita da  $\varphi(t, x_0) = x(t, 0, x_0)$  è detta flusso (o sistema dinamico) associato all'equazione (2.20).

**PROPOSIZIONE 2.6.2** Valgono le seguenti proprietà:

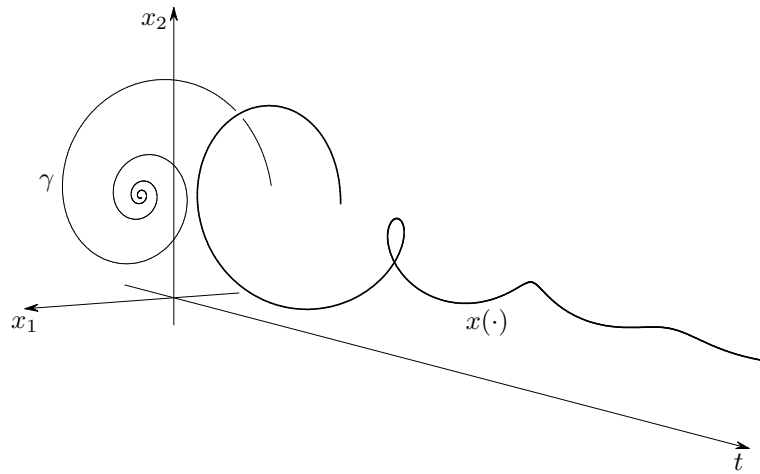


Figura 2.7 - L'orbita della soluzione  $x(\cdot)$  è la proiezione  $\gamma$  del grafico di  $x(\cdot)$  sullo spazio degli stati.

- a) L'insieme  $E = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega : \omega_-(x) < t < \omega_+(x)\}$  è aperto e  $\varphi: E \rightarrow \Omega$  è continua.
- b)  $\varphi(0, \cdot) = \text{id}_\Omega$ ;
- c)  $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(s + t, x)$ .

*Dimostrazione.* Per la prima proprietà si veda il Teorema 2.5.5, mentre la seconda è immediata per la definizione stessa di  $\varphi$ . Per la terza proprietà basta osservare che le funzioni  $\varphi(\cdot, \varphi(s, x))$  e  $\varphi(s + \cdot, x)$  sono entrambe soluzioni del problema con dato iniziale  $\varphi(s, x)$ , quindi coincidono.  $\square$

Fissato  $x \in \Omega$ , la funzione  $t \mapsto \varphi(t, x)$  porta lo stato  $x$  del sistema modellizzato dall'equazione differenziale nel nuovo stato  $\varphi(t, x)$ , che rappresenta l'evoluzione del sistema dopo che è trascorso il tempo  $t$ . Diciamo *orbita* di un punto  $x_0 \in \Omega$  l'immagine della soluzione  $\varphi(\cdot, x_0)$ . Altrimenti detto, le orbite sono le proiezioni dei grafici delle soluzioni sullo spazio *degli stati* o *delle fasi*  $\mathbb{R}^n$ . Se interpretiamo "cinematicamente" una soluzione  $x(\cdot)$  come legge oraria del moto di un punto, l'orbita individuata da  $x$  (detta anche orbita della soluzione  $x$ ) non è altro che l'insieme delle posizioni assunte. Notiamo che, se  $x_0$  è tale che  $f(x_0) = 0$ , allora  $x(t) \equiv x_0$  è soluzione e  $\{x_0\}$  è un'orbita.

PROPOSIZIONE 2.6.3 Valgono le seguenti proprietà:

- a) due orbite distinte non possono avere alcun punto in comune.
- b) se  $x: J \rightarrow \Omega$  è una soluzione non costante, allora è necessariamente una curva regolare, cioè  $x'(t) \neq 0$  per ogni  $t \in J$ .

*Dimostrazione.* a) Siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  due orbite, corrispondenti alle soluzioni  $x^1$  e  $x^2$ , rispettivamente. Se fosse

$$x^1(t_1) = x^2(t_2) \quad \text{per una coppia } t_1, t_2 \text{ (nei rispettivi domini),}$$

allora

$$u(t_2) = x^2(t_2), \quad \text{con } u(t) := x^1(t - (t_2 - t_1)).$$

La funzione  $u$  è soluzione, per cui  $u \equiv x^2$  e quindi le orbite di  $x^1$  e di  $x^2$  poiché  $u$  è una traslata temporale di  $x^1$ .

b) Se esistesse  $t_0 \in J$  con  $x'(t_0) = 0$  allora dovrebbe essere

$$0 = x'(t_0) = f(x(t_0)),$$

quindi  $x_0 := x(t_0)$  sarebbe tale che  $f(x_0) = 0$ : l'orbita di  $x$  e quella della soluzione costante con valore  $x_0$  dovrebbero coincidere perché presentano un punto in comune.  $\square$

OSSERVAZIONE 2.6.4 Dato un sistema in forma normale

$$x' = f(t, x), \quad (t, x) \in D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad (2.22)$$

è possibile trasformarlo in un sistema autonomo a patto di aumentare il numero delle equazioni. Più precisamente, denotando con  $x_i(\cdot)$  le componenti di  $x(\cdot)$ , si ha che: i grafici delle soluzioni di (2.22) sono tutte e sole le orbite del sistema (autonomo)

$$\begin{cases} x'_0 = 1 \\ x'_i = f(x_0, x), \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.23)$$

nell'incognita  $X = (x_0, x) = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Infatti, è evidente che se  $x: J \rightarrow \mathbb{R}^n$  risolve (2.22) allora  $X: t \mapsto (t, x(t)): J \rightarrow D$  è soluzione di (2.23), e il grafico di  $x(\cdot)$  è l'orbita di  $X(\cdot)$ . Viceversa, se  $X = (x_0, x): J \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  è soluzione di (2.23), allora  $x'_0(t) = 1$ , per cui esiste  $\tau \in \mathbb{R}$  tale che  $x_0(t) = t + \tau$ ; di conseguenza l'orbita di  $X$  è

$$\{(x_0(t), x(t)) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in J\} = \{(s, x(s - \tau)) \in \mathbb{R}^{n+1} : s \in J + \tau\} = \text{graph } x_\tau,$$

dove  $x_\tau: t \mapsto x(t - \tau): J + \tau \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Poiché

$$x'_\tau(t) = x'(t - \tau) = f(x_0(t - \tau), x(t - \tau)) = f(t, x_\tau(t)),$$

la funzione  $x_\tau$  è soluzione di (2.22).

Nello studio delle orbite del sistema (2.20), le particolari rappresentazioni parametriche fornite dalle soluzioni del sistema stesso perdono la loro centralità. Infatti, dal punto di vista della geometria delle orbite, non è rilevante la velocità con cui sono percorse (il che è specificato dalla richiesta che  $x'(t) = f(x(t))$ ); così, se  $\gamma$  è l'orbita individuata dalla soluzione  $x: (a, b) \rightarrow \Omega$ , è naturale considerare la classe delle rappresentazioni parametriche di  $\gamma$  equivalenti a  $x$  (le *riparametrizzazioni* di  $x$ ), cioè la classe delle funzioni  $u$  per le quali esiste una funzione  $\psi: (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$  di classe  $C^1$ , invertibile con inversa  $C^1$ , per la quale:

$$u = x \circ \psi.$$

Risulta

$$u' = \lambda f(u), \quad \text{con } \lambda = \psi'.$$

La funzione  $\lambda$  è continua e mai nulla, per cui l'uguaglianza  $u' = \lambda f(u)$  traduce il parallelismo fra il vettore tangente  $u'$  e il campo assegnato  $f$ . Inoltre caratterizza le riparametrizzazioni delle soluzioni di (2.20). Più precisamente vale il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 2.6.5 *Si consideri il problema*

$$u' // f(u) \quad (2.24)$$

*cioè il problema della determinazione delle funzioni  $u: J \rightarrow \Omega$ , con  $J$  intervallo di  $\mathbb{R}$ , di classe  $C^1$  per le quali esiste  $\lambda \in C^0(J)$  mai nulla e tale che*

$$u' = \lambda f(u) \quad \text{in } J.$$

*Le soluzioni di (2.24) sono tutte e sole le riparametrizzazioni delle soluzioni di (2.20).*

*Dimostrazione.* Già abbiamo visto che se  $u$  è una riparametrizzazione di una soluzione allora  $u' = \lambda f(u)$  per un'opportuna  $\lambda$  continua e mai nulla. Viceversa, sia  $\psi$  una primitiva di  $\lambda$ . Allora  $\psi$  è invertibile, con inversa  $C^1$ , e si controlla immediatamente che  $x = u \circ \psi^{-1}$  è una soluzione di (2.20).  $\square$

Il problema (2.24) viene anche espresso mediante la scrittura seguente (dove utilizziamo la variabile  $x$  in luogo della  $u$ ):

$$\frac{dx_1}{f_1(x)} = \frac{dx_2}{f_2(x)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x)}. \quad (2.25)$$

Riprenderemo questo problema, per il caso  $n = 2$ , nel § 3.7.



## Capitolo 3

# TECNICHE ELEMENTARI DI INTEGRAZIONE

In questo capitolo prendiamo in considerazione alcune tipologie di equazioni per le quali sono stati sviluppati metodi *ad hoc* (equazioni a variabili separabili, omogenee, di Bernoulli, sistemi preda-predatore, ...) e che forniscono spesso casi modello utili per la comprensione degli sviluppi della teoria.

L'appendice A contiene una breve esposizione della condizione di ottimalità per funzionali che va sotto il nome di *Equazione di Eulero*: si tratta di un'equazione differenziale da cui traggono origine molti esempi rilevanti.

Nell'appendice B si richiama il concetto di forma differenziale lineare.

### 3.1 EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

Si tratta di equazioni scalari della forma

$$x' = g(t)h(x) \quad g \in C^0(I_1), h \in C^0(I_2), \quad (3.1)$$

con  $I_1$  e  $I_2$  intervalli aperti. Osserviamo subito che le funzioni costanti che assumono uno degli eventuali zeri di  $h$  sono soluzioni dell'equazione differenziale.

Sia ora  $x$  una soluzione di (3.1), su un intervallo  $J$  in cui  $t \mapsto h(x(t))$  è non nulla; risulta:

$$\frac{1}{h(x(t))} x'(t) = g(t) \quad \text{per ogni } t \in J, \quad (3.2)$$

e quindi, passando agli integrali indefiniti di entrambi i membri:

$$\int \frac{1}{h(x(t))} x'(t) dt = \int g(t) dt;$$

quest'ultima uguaglianza può anche essere riscritta come:

$$\left( \int \frac{1}{h(\xi)} d\xi \right)_{\xi=x(t)} = \int g(t) dt \quad (t \in J).$$

In tal modo viene individuata implicitamente la soluzione  $x$  su  $J$ .

Più precisamente, detto  $t_0$  un punto di  $J$  e posto  $x_0 = x(t_0)$  (per cui  $h(x_0) \neq 0$ ), definiamo

$$H(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{h(\xi)} d\xi,$$

per ogni  $x$  nella componente connessa  $U$  di  $h^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  contenente  $x_0$ ; e sia

$$G(t) = \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau \quad \text{per } t \in I_1.$$

Allora, integrando la (3.2) fra  $t_0$  e  $t \in J$ , risulta:

$$H(x(t)) = G(t) \quad \text{per } t \in J.$$

Poiché su  $U$  la funzione  $H$  è invertibile con inversa  $C^1$  (essendo la derivata  $1/h$  mai nulla), quest'ultima equazione individua univocamente  $x$  su  $J$ :

$$x(t) = H^{-1}(G(t)) \quad \text{per } t \in J. \tag{3.3}$$

Analizziamo ora la funzione a secondo membro. L'insieme  $V = H(U)$  è un intervallo aperto in quanto  $H$ , come detto, è di classe  $C^1$ , invertibile e con inversa  $C^1$ . La composizione di  $G$  con  $H^{-1}: V \rightarrow U$  è definita in  $G^{-1}(V)$ : pertanto la componente connessa  $J_0$  di  $G^{-1}(V)$  cui appartiene  $t_0$  contiene  $J$  e costituisce quindi il più ampio intervallo contenente  $t_0$  in cui estendere la soluzione  $y$  con la condizione che  $h \circ y$  non si annulli (vedi [2]).

Riassumendo:

Dato  $(t_0, x_0) \in I_1 \times I_2$  con  $h(x_0) \neq 0$ , risulta univocamente individuato un intervallo  $J_0$  che risulta essere per ogni soluzione  $x$  dell'equazione (3.1), con  $y(t_0) = y_0$ , il più ampio in cui  $x$  può essere definita con  $h \circ x \neq 0$ ; in tale intervallo queste soluzioni sono univocamente individuate dall'equazione

$$H(x(t)) = G(t).$$

**OSSERVAZIONE 3.1.1** Le considerazioni sopra esposte tengono conto della possibilità che l'equazione non presenti unicità per i corrispondenti problemi di Cauchy: due soluzioni che coincidono in un punto  $t_0$  in cui  $h(x_0) \neq 0$  devono coincidere fintanto che si mantengono diverse da uno zero di  $h$ . Può essere utile pensare all'esempio

$$x' = \sqrt{|x|},$$

che presenta le soluzioni

$$x_0 \equiv 0, \quad x_1 = \begin{cases} \frac{1}{4}(t-c)^2 & \text{se } t \geq c \\ 0 & \text{se } t \leq c \end{cases}, \quad x_2 = \begin{cases} \frac{1}{4}(t-c)^2 & \text{se } t \geq c \\ -\frac{1}{4}(t-c)^2 & \text{se } t \leq c \end{cases}.$$

ESEMPI  $x' = 2te^{-x}$ ,  $x' = -2t(x-1)$ ,  $x' = x(x-1)$ ,  $x' = tx(x-1)$ ,  $\begin{cases} x' = \frac{t}{e^x+1} \\ x(0) = 0 \end{cases}$ ,  $x' = \sqrt[3]{x^2}$ .

### 3.2 EQUAZIONI LINEARI DEL PRIMO ORDINE

In occasione dello studio del Lemma di Gronwall abbiamo già incontrato le equazioni della forma

$$x' + p(t)x = q(t), \tag{3.4}$$

dove  $p$  e  $q$  sono funzioni continue su un intervallo  $I$ .



Detta  $P$  una primitiva di  $p$ , la famiglia delle soluzioni è data da:

$$x(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} q(t) dt.$$

Osserviamo che se  $q \equiv 0$  allora la (3.4) diventa un'equazione a variabili separabili, le cui soluzioni sono:

$$x(t) = Ce^{-P(t)} \quad \text{al variare di } C \in \mathbb{R}.$$

Mostriamo ora come da queste sia possibile ricavare l'integrale generale della (3.4). Al riguardo utilizzeremo il seguente risultato di struttura.

PROPOSIZIONE 3.2.1 *Se  $\bar{x}$  è una fissata soluzione dell'equazione (3.4) tutte e sole le soluzioni della stessa equazione (3.4) sono esprimibili nella forma*

$$x = x_o + \bar{x},$$

al variare di  $x_o$  fra le soluzioni dell'equazione omogenea associata  $x' + p(t)x = 0$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione è immediata conseguenza del risultato successivo, applicato all'operatore lineare

$$L: C^1(I) \rightarrow C^0(I), \quad Lx = x' + p(t)x. \quad \square$$

PROPOSIZIONE 3.2.2 *Sia  $L: V \rightarrow W$  un'applicazione lineare fra spazi vettoriali. Sia  $q \in W$  e  $\bar{x} \in V$  tale che  $L\bar{x} = q$ . Allora*

$$L^{-1}(q) = L^{-1}(0) + \bar{x}.$$

*Dimostrazione.* Un elemento  $x$  sta in  $L^{-1}(q)$  se e solo se  $Lx = q = L\bar{x}$ , cioè  $L(x - \bar{x}) = 0$ . Ma ciò significa che  $x - \bar{x} \in L^{-1}(0)$ , cioè  $x \in L^{-1}(0) + \bar{x}$ .  $\square$

Una soluzione cosiddetta *particolare*  $\bar{x}$  dell'equazione completa (3.4) può essere ottenuta dall'espressione  $Ce^{-P(t)}$  dell'integrale generale dell'equazione omogenea mediante il metodo di *variazione delle costanti arbitrarie*, che consiste nel cercare una soluzione nella forma

$$\bar{x}(t) = C(t)e^{-P(t)},$$

con  $C(t)$  funzione da determinare. Deve allora essere:

$$C'(t)e^{-P(t)} - C(t)e^{-P(t)}p(t) + p(t)C(t)e^{-P(t)} = q(t),$$

da cui

$$C'(t) = q(t)e^{P(t)}.$$

Per integrazione si ricava una possibile funzione  $C$ ; ad esempio, se  $t_0$  è un punto di  $I$ , possiamo scegliere

$$C(t) = \int_{t_0}^t q(s)e^{P(s)} ds.$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione (3.4) diventa ( $K$  costante arbitraria):

$$\begin{aligned} x &= Ke^{-P(t)} + e^{-P(t)} \int_{t_0}^t q(s)e^{P(s)} ds \\ &= e^{-P(t)} \left[ K + \int_{t_0}^t q(s)e^{P(s)} ds \right] \\ &= e^{-P(t)} \int q(t)e^{P(t)} dt, \end{aligned} \tag{3.5}$$

coerentemente con quanto già noto.

ESEMPLI  $x' = t^2x + t^5$ ,  $x' + \frac{1}{t+1}x = \sin t$ .

### 3.3 EQUAZIONI DI BERNOULLI; EQUAZIONE DI RICCATI

Sono dette di Bernoulli le equazioni della forma

$$x' + p(t)x = q(t)x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

con  $p$  e  $q$  funzioni continue su un intervallo  $I$ . Se  $\alpha = 0$  o  $\alpha = 1$  l'equazione si riduce ad un'equazione lineare. Se  $\alpha > 0$  vi è la soluzione  $x \equiv 0$ . In ogni caso le altre soluzioni si ottengono dividendo per  $x^{-\alpha}$

$$x^{-\alpha}x' + p(t)x^{1-\alpha} = q(t)$$

e ponendo

$$z = x^{1-\alpha}.$$

Infatti risulta  $z' = (1 - \alpha)x^{-\alpha}x'$  e quindi l'equazione si trasforma nella

$$\frac{1}{1-\alpha}z' + p(t)z = q(t),$$

che è un'equazione lineare.

ESEMPIO Determinare la curva  $y = \varphi(x)$  del piano  $xy$  per la quale il punto medio dei segmenti di normale aventi un estremo sulla curva stessa e l'altro sull'asse  $x$  si trova sulla parabola di equazione  $x = y^2$ . [Si ottiene l'equazione  $\varphi' - \frac{1}{2}\varphi = -2x/\varphi$ ].

Un caso classico in cui si giunge ad un'equazione differenziale di Bernoulli è quello dell'*equazione di Riccati*. Si tratta di un'equazione della forma

$$x' = a(t) + b(t)x + c(t)x^2, \tag{3.6}$$

con  $a, b$  e  $c$  funzioni continue su un intervallo  $I$ .

OSSERVAZIONE 3.3.1 Notiamo come il secondo membro costituisca la più semplice non linearità in  $x$ , ottenibile, ad esempio, sviluppando in  $x = 0$  una funzione  $x \mapsto f(t, x)$ . Inoltre, osserviamo anche che se utilizziamo la variabile  $u$  individuata dalla relazione:

$$x(t) = -\frac{1}{c(t)} \frac{d}{dt} \log u(t)$$

è immediato verificare che l'equazione soddisfatta da  $u$  è lineare del secondo ordine (a coefficienti variabili).

Si verifica immediatamente che se è nota una soluzione  $\bar{x}$  di (3.6), la posizione  $u = x - \bar{x}$  dà un'equazione di Bernoulli in  $u$ :

$$u' - (b(t) + 2c(t)\bar{x})u = c(t)u^2.$$

ESEMPIO

$$x' = \frac{1}{t} - \left(\frac{1}{t} + 2\right)x + tx^2$$

Una soluzione è data da  $\bar{x}(t) = 1/t$ . La sostituzione  $u = x - 1/t$  porta all'equazione di Bernoulli (con  $\alpha = 2$ ):

$$u' + \frac{1}{t}u = tu^2,$$

la quale, con la sostituzione  $z = 1/u$ , si trasforma nell'equazione lineare

$$z' - \frac{1}{t}z = -t.$$

ESEMPIO Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  consideriamo l'equazione

$$x' + x^2 = t^2 + \alpha. \quad (3.7)$$

Se  $\alpha = 1$  la funzione  $\bar{x}(t) = t$  è soluzione; ciò permette di applicare il metodo risolutivo (le soluzioni saranno espresse tramite  $\int_0^t e^{-s^2} ds$ ). Per un generico valore di  $\alpha$  osserviamo che la posizione

$$u(t) = t + \frac{\alpha + 1}{x + t}$$

trasforma l'equazione (3.7) nella seguente:

$$u' + u^2 = t^2 + (\alpha + 2).$$

Si tratta della stessa equazione (3.7), ma con  $\alpha + 2$  in luogo di  $\alpha$ . Poiché per  $\alpha = 1$  è nota la soluzione  $\bar{x}(t) = t$ , ciò consente di ricavare una soluzione particolare per  $\alpha = 3$ :

$$\bar{u}(t) = t + \frac{2}{\bar{x}(t) + t} = t + \frac{1}{t}.$$

Quindi l'equazione (3.7) è risolubile per ogni  $\alpha$  dispari.

### 3.4 EQUAZIONI DI TIPO OMOGENEO

Si tratta di equazioni della forma

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad (g \text{ continua}).$$

(qui chiameremo  $x$  la 'variabile indipendente', per cui  $y = y(x)$ ). Si risolve ponendo

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Infatti,  $y = xz$  e  $y' = z + xz'$ , per cui l'equazione diventa:

$$z' = \frac{g(z) - z}{x},$$

che è a variabili separabili.

ESEMPIO  $y' = \frac{x + y}{x - y}$  (le soluzioni sono archi di spirale logaritmica).

*Equazioni di tipo omogeneo generalizzato.*

a) Per equazioni della forma

$$y' = g(ax + by) \quad (g \text{ continua}, a, b \text{ costanti}).$$

dove, chiaramente possiamo supporre  $b \neq 0$ , la posizione

$$z(x) = ax + by(x)$$

conduce all'equazione:

$$z' = a + bg(z),$$

che è a variabili separabili.

b) Consideriamo ora equazioni della forma

$$y' = g\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$$

con  $g$  continua.

Se  $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$  allora si può scrivere, ad esempio,  $a'x + b'y = \lambda(ax + by)$ , per cui si ricade nel caso precedente.

Sia pertanto  $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ . In tal caso le equazioni  $ax + by + c = 0$  e  $a'x + b'y + c' = 0$  sono le equazioni di due rette incidenti: sia  $(x_0, y_0)$  il loro punto di intersezione. Eseguiamo un cambiamento di variabili che porti l'origine in  $(x_0, y_0)$ , in modo da ricondursi al caso in cui l'argomento di  $g$  sia quoziente di due polinomi omogenei. Poniamo:

$$t = x - x_0, \quad u = y - y_0;$$

ciò significa considerare come nuova incognita la funzione  $u(t) = y(t + x_0) - y_0$ . Pertanto:

$$u'(t) = y'(t + x_0) = g\left(\frac{a(t + x_0) + b(u + y_0) + c}{a'(t + x_0) + b'(u + y_0) + c'}\right) = g\left(\frac{at + bu}{a't + b'u}\right),$$

poiché  $ax_0 + by_0 + c = 0$  e  $a'x_0 + b'y_0 + c' = 0$ . Allora l'equazione può essere riscritta come:

$$u' = g\left(\frac{a + b(u/t)}{a' + b'(u/t)}\right),$$

che è di tipo omogeneo.

ESEMPIO  $y' = \frac{y - x - 2}{y + x}$ .

### 3.5 EQUAZIONI DEL TIPO $F(y, y') = 0$ E DEL TIPO $F(x, y') = 0$

Consideriamo equazioni della forma

$$a) F(y, y') = 0; \quad b) F(x, y') = 0$$

dove  $y = y(x)$  (trattiamo assieme i due casi fin dove possibile). Cerchiamo di risolverle mediante un cambiamento di variabile  $x = x(s)$ . Più geometricamente, detta  $y: J \rightarrow \mathbb{R}$  una soluzione, cerchiamo di individuare una rappresentazione parametrica del grafico di  $y$ : se  $x = x(s)$ , al variare di  $s$  in un opportuno intervallo  $I$ , l'ordinata  $y$  del corrispondente punto del grafico è  $y = y(x(s))$ . Con notazione impropria, ma significativa, poniamo  $y(s) := y(x(s))$ . Per evitare equivoci denotiamo con  $\frac{dy}{ds}$  la derivazione di  $y$  rispetto alla variabile  $s$ , mentre  $y'$  indica la derivazione rispetto a  $x$ . Per ogni  $s \in I$  deve essere

$$a) F(y(s), y'(x(s))) = 0; \quad b) F(x(s), y'(x(s))) = 0$$

Possiamo esprimere queste uguaglianze dicendo che, al variare di  $s \in I$ ,

$$a) s \mapsto (y(s), y'(x(s))); \quad b) s \mapsto (x(s), y'(x(s))) \tag{3.8}$$

forniscono rappresentazioni parametriche di un arco  $\mathcal{C}$  della curva di equazione  $F = 0$  (nel piano  $yy'$  o  $xy'$ , rispettivamente). Supponiamo sia nota una rappresentazione parametrica

$$a) \begin{cases} y = A(s) \\ y' = B(s) \end{cases}; \quad b) \begin{cases} x = A(s) \\ y' = B(s) \end{cases} \quad (3.9)$$

di tale arco  $\mathcal{C}$ . Cerchiamo di determinare il cambiamento di variabile  $x(s)$  in modo che la rappresentazione (3.9) coincida con la (3.8); quindi richiediamo che sia:

$$a) \begin{cases} y(s) = A(s) \\ y'(x(s)) = B(s) \end{cases}; \quad b) \begin{cases} x(s) = A(s) \\ y'(x(s)) = B(s) \end{cases} .$$

Allora:

$$\frac{dy}{ds} = y'(x(s)) \frac{dx}{ds}. \quad (3.10)$$

Nel caso (a) questo dà:

$$A'(s) = B(s)x'(s)$$

quindi, ricavando  $x'(s)$  e integrando,

$$x(s) = \int \frac{A'(s)}{B(s)} ds.$$

La coppia  $(x(s), y(s))$  fornisce, chiaramente, una rappresentazione parametrica del grafico della soluzione:

$$a) \begin{cases} x = x(s) = \int \frac{A'(s)}{B(s)} ds \\ y = y(s) = A(s) \end{cases}$$

Nel caso (b) la (3.10) dà invece

$$\frac{dy}{ds} = B(s)A'(s)$$

per cui il grafico della soluzione è rappresentato da

$$b) \begin{cases} x = x(s) = A(s) \\ y = y(s) = \int A'(s)B(s) ds. \end{cases}$$

**OSSERVAZIONE 3.5.1** Sottolineiamo come le espressioni per  $x(s)$  e  $y(s)$  sono ricavate dall'uguaglianza (3.10):

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{ds}$$

tenendo conto delle rappresentazioni parametriche (3.9) dell'arco  $\mathcal{C}$  della curva di equazione  $F = 0$ .

**ESEMPIO** (Brachistòcrona o problema della più rapida discesa: Johann Bernoulli - 1696)

Dati due punti  $P_1$  e  $P_2$  in un piano verticale (il primo a quota maggiore), determinare il cammino liscio che li congiunge lungo il quale un punto materiale discenda da  $P_1$  a  $P_2$  per effetto della sola gravità nel più breve tempo possibile (Figura 3.1).

Siano  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$ , con  $x_1 < x_2$  e  $y_1 > y_2$ , e sia

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

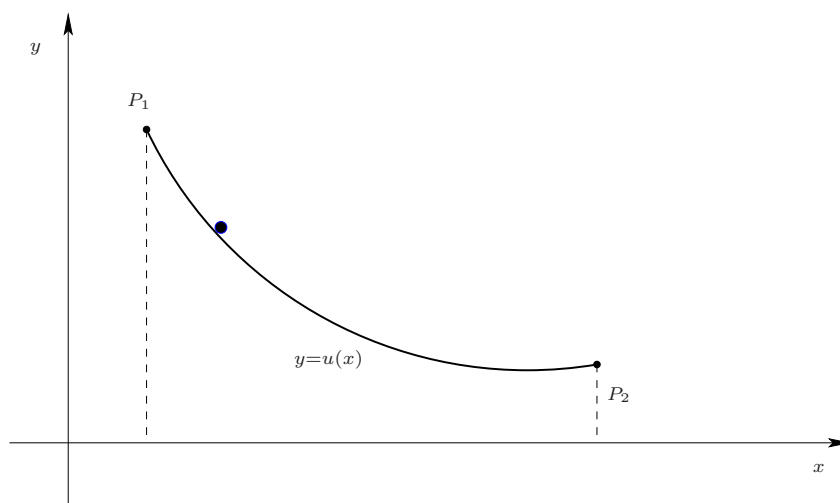


Figura 3.1 - Il problema del cammino di più rapida discesa

la legge oraria del moto del punto. Supporremo che la curva descritta sia grafico di una funzione  $u: [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Se assumiamo che il tempo  $t = 0$  corrisponda alla posizione iniziale  $P_1$ , lo spazio percorso fino all'istante  $t$  è

$$s(t) = \int_{x_1}^{x(t)} \sqrt{1 + u'(x)^2} dx.$$

Pertanto la velocità (scalare) è

$$v(t) = \sqrt{1 + u'(x(t))^2} x'(t),$$

da cui

$$x'(t) = \frac{v(t)}{\sqrt{1 + u'(x(t))^2}}. \quad (3.11)$$

Del resto possiamo calcolare  $v$  utilizzando la conservazione dell'energia: se  $m$  è la massa del punto e  $v_0 = v(0)$  la velocità iniziale, allora

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv(t)^2 + mgy(t)$$

da cui, tenendo conto che  $y(t) = u(x(t))$ ,

$$\begin{aligned} v(t)^2 &= v_0^2 + 2gy_1 - 2gu(x(t)) \\ &= 2g(H - u(x(t))), \quad \text{con } H = \frac{v_0^2}{2g} + y_1. \end{aligned}$$

Sostituiamo nella (3.11) e otteniamo

$$x'(t) = \frac{\sqrt{2g(H - u(x(t)))}}{\sqrt{1 + u'(x(t))^2}}.$$

Possiamo assumere che la funzione  $x(t)$  sia invertibile; per l'inversa  $t'(x)$  risulta

$$t'(x) = \frac{1}{x'(t)} = \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{\sqrt{2g(H - u(x))}}.$$

Il tempo impiegato per percorrere l'arco fra  $P_1$  e  $P_2$  si ottiene ora per integrazione:

$$T(u) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{\sqrt{H-u(x)}} dx.$$

Come verrà maggiormente dettagliato in appendice a questo capitolo, le eventuali soluzioni del problema di minimo per il funzionale

$$T(u) = \int_{x_1}^{x_2} f(u(x), u'(x)) dx, \quad \text{con } f(u, u') = \frac{\sqrt{1+u'(x)^2}}{\sqrt{H-u(x)}}$$

rendono costante la funzione  $f(u, u') - u' f_{u'}(u, u')$  (vedi Osservazione 3.7.11). Un calcolo diretto porta così alla condizione:

$$(H-u)(1+u'^2) = c^2 \quad (c \text{ costante}).$$

Si tratta di un'equazione della forma  $F(u, u') = 0$ .

Seguiamo il metodo di risoluzione sopra delineato. Una rappresentazione parametrica della curva  $(H-u)(1+u'^2) = c^2$  è:

$$\begin{cases} u = H - \frac{c^2}{1 + \tan^2 \frac{s}{2}} = H - \frac{1}{2}c^2(1 + \cos s) =: A(s) \\ u' = \tan \frac{s}{2} =: B(s) \end{cases} \quad s \in (-\pi, \pi).$$

Pertanto

$$x(s) = \int \frac{A'(s)}{B(s)} ds = c^2 \int \cos^2 \frac{s}{2} ds = \frac{c^2}{2}(s + \sin s) + K,$$

con  $K$  costante arbitraria. Quindi:

$$\begin{cases} x = K + \frac{c^2}{2}(s + \sin s) \\ y = H - \frac{c^2}{2}(1 + \cos s) \end{cases},$$

o anche:

$$\begin{cases} x = K + r(s + \sin s) \\ y = H - r(1 + \cos s) \end{cases} \quad \text{con } K \in \mathbb{R} \text{ e } r \geq 0 \text{ arbitrari.}$$

Si tratta delle equazioni parametriche di una *cicloide*, cioè del luogo delle posizioni assunte da un punto fissato su una circonferenza di raggio  $r$  quando viene fatta rotolare su una retta come in Figura 3.2. Le coordinate del punto dopo la rotazione di un angolo  $\vartheta$  come in figura sono date da

$$x = r\vartheta - r \sin \vartheta = r(\vartheta - \sin \vartheta), \quad y = r - r \cos \vartheta = r(1 - \cos \vartheta);$$

il cambiamento di parametro  $\vartheta = \pi + s$  dà (a meno di una traslazione)

$$\begin{cases} x = r(s + \sin s), \\ y = r(1 + \cos s). \end{cases}$$

Rispetto a questa curva l'arco di minima discesa è capovolto (e opportunamente traslato).

OSSERVAZIONE 3.5.2 Notiamo esplicitamente che il procedimento ora svolto non implica necessariamente che la funzione individuata risolva il problema di minimo, in quanto le considerazioni sopra esposte non garantiscono che esista il minimo del funzionale  $T$ . La questione non è immediata: il lettore interessato può consultare, ad esempio, [6].

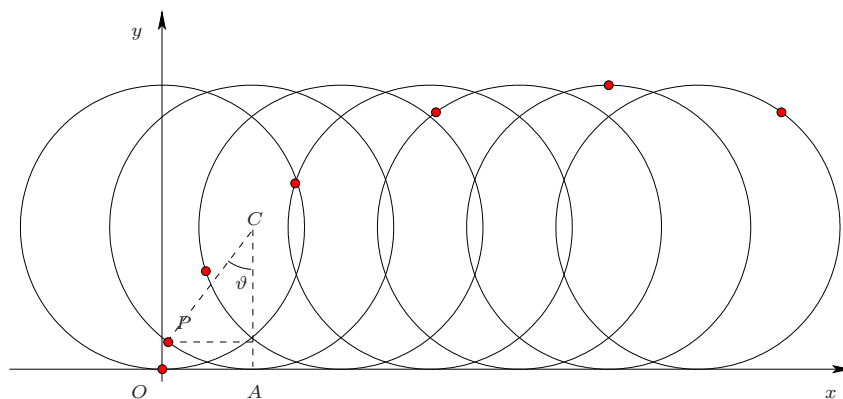


Figura 3.2 - Cicloide: le coordinate di  $P$  sono  $x = r\vartheta - r \sin \vartheta$  e  $y = r - r \cos \vartheta$

### 3.6 EQUAZIONE DI CLAIRAUT

Si tratta di equazioni cui si perviene spesso nella determinazione di una curva mediante imposizioni di condizioni sulla retta tangente. Sono equazioni della forma

$$y = xy' + g(y'), \quad (3.12)$$

con  $g$  di classe  $C^2$ .

Se  $y$  è una soluzione  $C^2$ , derivando entrambi i membri dell'equazione otteniamo

$$y''(x + g'(y')) = 0;$$

quindi  $y'' = 0$ , cioè  $y' = C$  costante, oppure  $x + g'(y') = 0$ . Nel primo caso la costante  $C$  individua subito la soluzione a partire dall'equazione stessa:

$$y = Cx + g(C), \quad C \in \mathbb{R}. \quad (3.13)$$

Si tratta di una famiglia di funzioni lineari che effettivamente sono soluzioni. La condizione  $x + g'(y') = 0$ , cioè  $x = -g'(y')$ , assieme all'equazione stessa dà:

$$\begin{cases} x = -g'(y') \\ y = -y'g'(y') + g(y') \end{cases};$$

ciò suggerisce la curva in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = -g'(t) \\ y = -tg'(t) + g(t) \end{cases}. \quad (3.14)$$

Negli intervalli in cui  $g'$  è invertibile si verifica che questa definisce effettivamente una soluzione dell'equazione data. Infatti possiamo eliminare il parametro  $t$  ricavandolo dalla prima equazione e ottenere così per la funzione  $y$ :

$$y' = \frac{dy}{dx} / \frac{dx}{dt} = \frac{-g'(t) - tg''(t) + g'(t)}{-g''(t)} = t,$$

per cui l'uguaglianza  $y = -tg'(t) + g(t)$  assieme a  $x = -g'(t)$  dà  $y = xy' + g(y')$ .



Si può dimostrare che la curva (3.14) è l'involuppo dei grafici (rette) della famiglia (3.13) di soluzioni.

ESEMPIO  $y = xy' + y'^2$ .

Si ottiene la famiglia di rette

$$y = Cx + C^2 \quad (C \in \mathbb{R}).$$

La curva (3.14) diventa:

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = -t^2 \end{cases}$$

che in forma cartesiana è  $y = -x^2/4$ : è facile verificare che la famiglia delle rette tangenti a questa parabola è proprio data da  $y = Cx + C^2$  al variare di  $C \in \mathbb{R}$ .

### 3.7 EQUAZIONI DIFFERENZIALI E FORME DIFFERENZIALI

Riprendiamo le considerazioni fatte nel §2.6, in particolare il problema sintetizzato dall'equazione (2.25), nel caso  $n = 2$ . Data la funzione continua  $f = (g, h): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  (con  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^2$ ), consideriamo il sistema autonomo

$$\begin{cases} x' = g(x, y) \\ y' = h(x, y) \end{cases}.$$

e il problema della determinazione delle curve in  $\Omega$  i cui vettori tangenti siano in ogni punto paralleli al campo  $f$  in quel punto, richiesta espressa dall'uguaglianza:

$$\frac{dx}{g(x, y)} = \frac{dy}{h(x, y)}. \quad (3.15)$$

A questa situazione può essere ricondotto anche il caso di una singola equazione scalare  $y'(x) = f(x, y(x))$ , considerando il sistema (vedi Osservazione 2.6.4)

$$\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = f(x(t), y(t)) \end{cases}$$

nel senso che i grafici dell'equazione sono le orbite del sistema.

L'equazione (3.15) può formalmente essere riscritta come

$$h(x, y)dx - g(x, y)dy = 0. \quad (3.16)$$

Nel caso dell'equazione  $y' = f(x, y)$ , cioè  $dy/dx = f(x, y)$ , questa diventa

$$f(x, y)dx - dy = 0.$$

Il significato dell'uguaglianza (3.16) è precisato dalla seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 3.7.1 *Sia  $u = (x, y): J \rightarrow \Omega$  una curva regolare di classe  $C^1$  e tale che  $f \circ u$  non si annulli mai. Allora  $u$  soddisfa (3.15) se e solo se*

$$h(x(t), y(t))x'(t) - g(x(t), y(t))y'(t) = 0 \quad \text{per ogni } t \in J. \quad (3.17)$$

*Dimostrazione.* Sia  $u$  soddisfacente (3.15), per cui esiste  $\lambda \in C^0(J)$  per la quale  $u'(t) = \lambda(t)f(u(t))$ ; allora

$$hx' - gy' = h\lambda g - g\lambda h = 0 \quad \text{in } J,$$

da cui la (3.17). Viceversa, se vale (3.17) e  $\bar{t}$  è un dato punto di  $J$ , si abbia, ad esempio,  $h(x(\bar{t}), y(\bar{t})) \neq 0$  (per ipotesi  $f \circ (x, y)$  non si annulla mai). Per continuità questa relazione è vera per tutti i  $t$  in un intorno di  $\bar{t}$ ; allora

$$x'(t) = \frac{y'(t)}{h(x(t), y(t))}g(x(t), y(t)), \quad y'(t) = \frac{y'(t)}{h(x(t), y(t))}h(x(t), y(t)),$$

in un intorno di  $\bar{t}$ , da cui  $u' = \lambda f(u)$  con  $\lambda(t) = y'(t)/h(u(t))$ ; notiamo che  $\lambda$  è una funzione continua e  $\lambda(t) \neq 0$  poiché altrimenti  $x'(t) = y'(t) = 0$ .  $\square$

Se ricordiamo la nozione di forma differenziale lineare, la condizione (3.17) esprime proprio l'annullarsi, nei punti della curva  $u = (x(\cdot), y(\cdot))$ , della forma differenziale

$$\omega(x, y) := h(x, y)dx - g(x, y)dy$$

sul vettore tangente  $u'(t) = (x'(t), y'(t))$ .<sup>14</sup>

In generale, data una forma differenziale lineare

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x)dx_i \quad (a_i \in C^0(\Omega))$$

su un aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$ , diciamo che una funzione  $x = (x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)) : J \rightarrow \Omega$ , con  $J$  intervallo, è una (curva-)soluzione dell'equazione

$$\omega = 0$$

se

$$\sum_{i=1}^n a_i(x(t))x'_i(t) = 0 \quad \text{per ogni } t \in J. \quad (3.18)$$

Questa condizione può anche essere espressa dicendo che il pull-back  $x^*\omega$  della forma  $\omega$  tramite la funzione  $x$  è nullo.

ESEMPI Il sistema di equazioni di Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x' = (\alpha - \beta y)x \\ y' = (-\gamma + \delta x)y \end{cases}$$

dà luogo all'equazione:

$$(\gamma - \delta x)ydx + (\alpha - \beta y)x dy = 0. \quad (3.19)$$

L'equazione scalare

$$y' = -\frac{x}{y}$$

fornisce l'equazione

$$x dx + y dy = 0. \quad (3.20)$$

Rilevante è il caso in cui la forma differenziale  $\omega(x, y) = h(x, y)dx - g(x, y)dy$  è *esatta*, cioè esiste  $H \in C^1(\Omega)$  (detta *primitiva*) tale che

$$dH(x, y) = \omega(x, y).$$

<sup>14</sup>Un richiamo alle forme differenziali lineari è in Appendice B.

Un esempio è proprio la (3.20). In tal caso  $H$  si mantiene costante sulle orbite. Ciò è precisato nella successiva proposizione, alla quale anteponiamo una definizione.

Data  $H \in C^1(\Omega)$  e  $c \in \mathbb{R}$ , diciamo che  $c$  è un valore regolare per  $H$  se

$$dH(x, y) \neq 0 \quad \text{per ogni } (x, y) \in H^{-1}(c).$$

Ad esempio  $c = 0$  non è un valore regolare per  $H(x, y) = x^2 - y^2$ ; l'insieme  $H^{-1}(0)$  si spezza in due rette incidenti.

PROPOSIZIONE 3.7.2 *Sia data la forma differenziale*

$$\omega(x, y) = a(x, y)dx + b(x, y)dy \quad (a, b \in C^0(\Omega)).$$

Supponiamo che  $\omega$  sia esatta: esiste  $H \in C^1(\Omega)$  tale che

$$dH = \omega \quad [\text{cioè } \frac{\partial H}{\partial x} = a(x, y) \text{ e } \frac{\partial H}{\partial y} = b(x, y)].$$

Allora ogni curva soluzione di  $\omega = 0$  è contenuta in un insieme di livello di  $H$  (cioè  $H$  è costante lungo ogni soluzione di  $\omega = 0$ ).

Viceversa, se  $c$  è un valore regolare di  $H$ , allora l'insieme di livello  $H^{-1}(c)$  è localmente orbita di una soluzione dell'equazione  $\omega = 0$ .

*Dimostrazione.* Se  $(x, y): J \rightarrow \Omega$  è soluzione di  $\omega = 0$ , allora

$$0 = a(x(t), y(t))x'(t) + b(x(t), y(t))y'(t) = \frac{d}{dt}H(x(t), y(t)),$$

per cui per ogni  $t \in J$

$$H(x(t), y(t)) = c \quad \text{per un opportuno valore } c \in \mathbb{R}.$$

Viceversa, se  $c$  è un valore regolare di  $H$ , per il Teorema della funzione implicita  $H^{-1}(c)$  è localmente grafico di una funzione  $C^1$ ; sia, ad esempio,  $H(x_0, y_0) = c$ , con  $\frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ : allora nell'intorno di  $(x_0, y_0)$  l'insieme  $H^{-1}(c)$  è grafico di una funzione  $y = \psi(x)$ . Quindi  $t \mapsto (t, \psi(t))$  risolve l'equazione  $\omega = 0$ :

$$a(t, \psi(t)) + b(t, \psi(t))\psi'(t) = \frac{d}{dt}H(t, \psi(t)) = 0,$$

poiché  $(t, \psi(t)) \in H^{-1}(c)$ .  $\square$

ESEMPIO. Sia

$$\omega(x, y) = xdx + ydy$$

la funzione  $H(x, y) = (x^2 + y^2)/2$  ne è una primitiva, per cui le orbite sono archi di circonferenza:

$$x^2 + y^2 = \text{costante}.$$

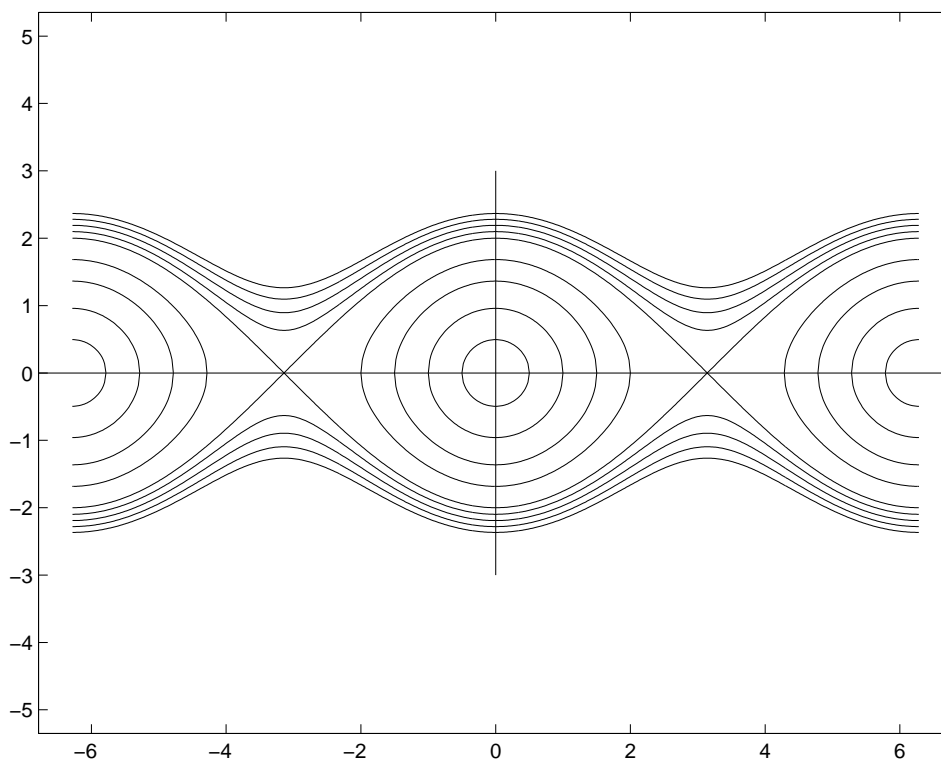


Figura 3.3 - Orbite per il pendolo libero.

ESEMPIO. Consideriamo l'equazione (1.25) del pendolo senza attrito:

$$\ddot{\vartheta} + \omega^2 \sin \vartheta = 0 \quad (\omega^2 = \frac{g}{l}).$$

Scriviamo il sistema del primo ordine equivalente:

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 \sin \vartheta \end{cases}$$

e la corrispondente equazione delle orbite:

$$\omega^2 \sin \vartheta d\vartheta + v dv = 0.$$

La forma è esatta: una primitiva è data da:

$$H(\vartheta, v) = \frac{1}{2}v^2 - \omega^2 \cos \vartheta.$$

In accordo con la Proposizione 3.7.2, le orbite hanno equazioni  $H(\vartheta, v) = c$  con  $c$  costante, cioè (posto  $c = -\omega^2 \gamma$ )

$$v = \pm \omega \sqrt{2(\cos \vartheta - \gamma)},$$

al variare di  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Una semplice analisi porta al diagramma di fase di cui alla Figura 3.3 (si studino i casi  $\gamma < -1$ ,  $\gamma = -1$ ,  $-1 < \gamma < 1$  e  $\gamma = 1$ ).

L'esempio precedente rientra fra i problemi della forma

$$x'' = f(x) \tag{3.21}$$

con  $f$  assegnata funzione reale definita su un intervallo  $I$ . Il sistema del primo ordine equivalente è:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = f(x) \end{cases}$$

che dà luogo alla forma differenziale esatta

$$\omega(x, y) = -f(x)dx + ydy = dH(x, y),$$

dove

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - F(x),$$

con  $F$  primitiva di  $f$ .

Osserviamo che il moto di un punto materiale di massa  $m$  mobile lungo una retta  $r$  (riferita a un sistema di ascisse  $x$ ) e soggetto a una forza posizionale  $f(x)$  è dato dall'equazione  $m\ddot{x} = f(x)$ , quindi, a meno del fattore  $m$ , dall'equazione (3.21). In tal caso la funzione

$$E(x) = \frac{1}{2}my^2 - F(x)$$

(con  $y = \dot{x}$ ) rappresenta l'energia totale del sistema. Più in generale, la coordinata  $x$  nella (3.21) può avere il significato di *coordinata lagrangiana* del sistema ad un grado di libertà in oggetto (cioè una coordinata che individua univocamente la configurazione del sistema): ad esempio la coordinata angolare  $\vartheta$  nel caso del pendolo.

Come si può notare nel caso specifico del pendolo, le linee di livello contenenti un punto in cui si annulla il campo separano regioni del piano  $xy$  in cui le linee di livello sono topologicamente differenti: si parla, al riguardo di *curve separatrici*.

~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ .

Nei casi in cui  $\omega$  non è esatta, è talvolta possibile determinare una funzione  $\mu(x, y)$  mai nulla per la quale  $\mu\omega$  sia esatta. Chiaramente vale il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 3.7.3 *Sia  $\mu \in C^0(\Omega)$  mai nulla. Allora  $u$  è soluzione di  $\omega = 0$  se e solo se  $u$  è soluzione di  $\mu\omega = 0$ .*

Si dice che la funzione  $\mu$  è un *fattore integrante* per la forma  $\omega$ .

ESEMPIO Riprendiamo l'esempio della forma differenziale (3.19), che non è esatta; cerchiamone un fattore integrante  $\mu$ . Deve essere

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}(\gamma - \delta x)y + \mu(x, y)(\gamma - \delta x) = \frac{\partial\mu}{\partial x}(\alpha - \beta y)x + \mu(x, y)(\alpha - \beta y).$$

Cerchiamo  $\mu$  nella forma a variabili separate:  $\mu(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ ; allora

$$\varphi(x)[\psi'(y)y + \psi(y)](\gamma - \delta x) = \psi(y)[\varphi'(x)x + \varphi(x)](\alpha - \beta y).$$

Una possibile soluzione si ottiene richiedendo:

$$\psi'(y)y + \psi(y) = 0 = \varphi'(x)x + \varphi(x).$$

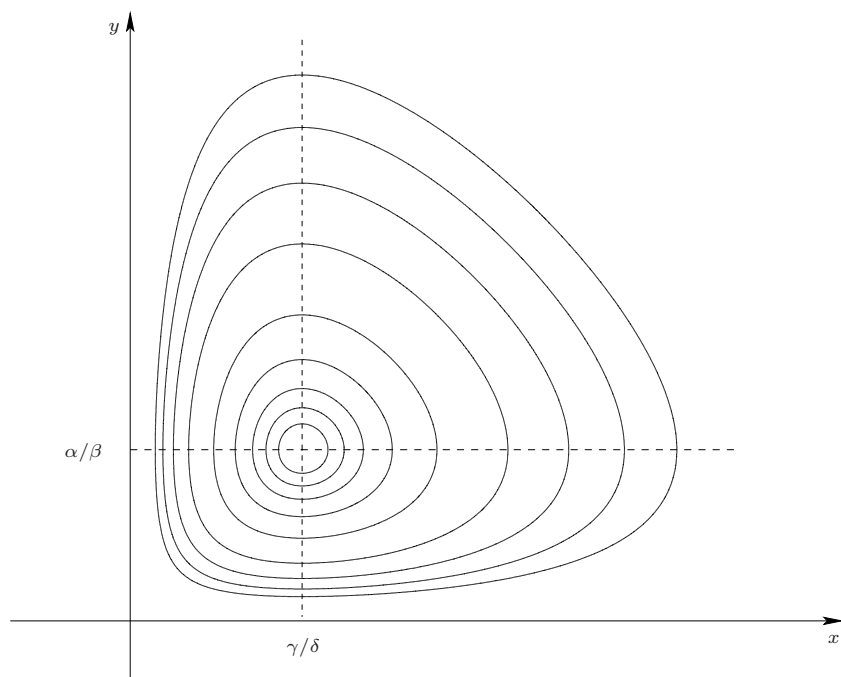


Figura 3.4 - Orbite delle equazioni di Lotka-Volterra (linee di livello di  $H(x, y) = \gamma \log x + \alpha \log y - \delta x - \beta y$ ).

Otteniamo così  $\varphi(x) = 1/x$  e  $\psi(y) = 1/y$ , cioè  $\mu(x, y) = 1/(xy)$ . Allora:

$$\mu\omega = \left(\frac{\gamma}{x} - \delta\right)dx + \left(\frac{\alpha}{y} - \beta\right)dy = dH(x, y),$$

con

$$H(x, y) = \gamma \log x + \alpha \log y - \delta x - \beta y.$$

Pertanto gli insiemi di livello di  $H$  danno le orbite del sistema di equazioni di Lotka-Volterra (vedi Figura 3.4).

ESEMPIO L'equazione

$$y' = \frac{x + y}{x - y}$$

che abbiamo risolto come equazione di tipo omogeneo (ottenendo come soluzioni archi di spirale logaritmica), una volta espressa come annullamento di una forma lineare diventa:

$$\omega := (x + y)dx + (y - x)dy = 0.$$

Tuttavia la forma  $\omega$  non è esatta, e non è immediato individuare un fattore integrante, anche localmente. Risulta più naturale esprimere l'equazione in coordinate polari, cioè cercare soluzioni nella forma

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos \vartheta(t) \\ y(t) = \rho(t) \sin \vartheta(t). \end{cases}$$

Se calcoliamo  $x'(t)$  e  $y'(t)$  e applichiamo la definizione di soluzione (vedi (3.18)), otteniamo (per  $\rho \neq 0$ ):

$$\rho d\rho - \rho^2 d\vartheta = 0, \tag{3.22}$$

cioè (per  $\rho \neq 0$ )  $(1/\rho)d\rho - d\vartheta = 0$ : questa è esatta, con primitiva  $\log \rho - \vartheta$ . Pertanto otteniamo come orbite le curve di equazione  $\log \rho - \vartheta = c$  o anche

$$\rho = Ce^{\vartheta}.$$

L'esempio ora illustrato è un caso di cambiamento di variabili nella forma differenziale (vedi Appendice B di questo capitolo). Formalmente la forma differenziale in (3.22) non è altro che l'espressione di  $\omega(x, y)$  in cui alle variabili  $x$  e  $y$  si sostituiscono  $\rho \cos \vartheta$  e  $\rho \sin \vartheta$ , rispettivamente.

### Appendice A: equazione di Eulero di un funzionale

Nel problema della brachistocrona, il tempo  $T$  di percorrenza relativo al cammino di discesa  $z = u(x)$ , con  $x_1 \leq x \leq x_2$ , è dato da:

$$T = T(u) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{H-u}} dx, \quad (3.23)$$

con  $H$  costante assegnata; si cerca una funzione  $u$  che risolva il problema di minimo:

$$\min_{u \in X} T(u),$$

dove  $X = \{u \in C^1([a, b]) : u(x_1) = z_1, u(x_2) = z_2\}$ . Questo problema può essere inquadrato in un contesto più generale e di ampia applicabilità.

Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale e  $X$  un sottoinsieme di  $V$ . Sia  $F: X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione definita (almeno) in  $X$  e consideriamo il problema

$$(P) \quad \min_{u \in X} F(u).$$

Dato  $u \in X$ , diremo *variazione ammissibile* di  $u$  rispetto a  $X$  ogni elemento  $v \in V$  per il quale esiste  $\delta > 0$  tale che

$$u + tv \in X \quad \text{per ogni } |t| < \delta.$$

Vale la semplice, ma fondamentale:

OSSERVAZIONE 3.7.4 Se  $\bar{u}$  è soluzione del problema (P) e  $v$  è una variazione ammissibile di  $\bar{u}$  rispetto a  $X$ , allora la funzione

$$\phi(t) = F(\bar{u} + tv), \quad (|t| < \delta)$$

ha minimo in  $t = 0$ . Pertanto, se  $\phi$  è derivabile in  $t = 0$ , risulta  $\phi'(0) = 0$ .

Motivati da ciò, indipendentemente dalla considerazione del problema (P), diamo la seguente:

DEFINIZIONE 3.7.5 (VARIAZIONE PRIMA) Sia  $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $X$  sottoinsieme di uno spazio vettoriale  $V$ . Dato  $u \in X$  e  $v \in V$  variazione ammissibile di  $u$  rispetto a  $X$ , se  $\phi(t) = F(u + tv)$  è derivabile per  $t = 0$ , diciamo *variazione prima di  $F$  in  $u$  rispetto a  $v$*  il valore

$$\delta F(u; v) := \phi'(0).$$

Pertanto:

PROPOSIZIONE 3.7.6 Sia  $\bar{u}$  soluzione del problema (P). Allora

$$\delta F(\bar{u}; v) = 0 \quad (3.24)$$

per ogni variazione ammissibile  $v$  (per la quale esista  $\delta F(\bar{u}; v)$ ).

OSSERVAZIONE 3.7.7 La condizione  $\delta F(\bar{u}; v) = 0$  è soltanto una condizione necessaria per la minimalità; si tratta di una condizione di *stazionarietà*.

Specializziamo ora lo studio al caso di funzionali integrali della forma

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x)) dx \quad (3.25)$$

dove ( $f = f(x, u, \xi)$ ):

$$f \in C^1([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}), \quad u \in C^1([a, b]).$$

In tal caso  $F: V \rightarrow \mathbb{R}$  con  $V = C^1([a, b])$  (e pertanto ogni elemento di  $V$  è una variazione ammissibile).

Il problema della stazionarietà per funzionali della forma (3.25) si incontra, ad esempio, in Meccanica Analitica: si ricordi infatti il *principio variazionale di Hamilton*, secondo cui fra tutti i moti virtuali nello spazio delle configurazioni i moti effettivi  $x(t)$  in un intervallo  $[t_1, t_2]$  rendono stazionario l'integrale

$$\mathcal{L}(x) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$$

dove  $L$  è la funzione lagrangiana del sistema e la stazionarietà è intesa nella cosiddetta classe dei moti variati sincroni (cioè senza perturbazione della scala temporale), che conservano le configurazioni del sistema all'istante iniziale e finale.

PROPOSIZIONE 3.7.8 *Nelle ipotesi poste risulta:*

$$\delta F(u; v) = \int_a^b \left[ f_u(x, u(x), u'(x))v(x) + f_\xi(x, u(x), u'(x))v'(x) \right] dx$$

comunque prese  $u, v \in C^1([a, b])$ .

*Dimostrazione.* Date  $u$  e  $v$  risulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(x, u + tv, u' + tv') \\ = f_u(x, u + tv, u' + tv')v + f_\xi(x, u + tv, u' + tv')v'; \end{aligned}$$

l'applicazione  $(x, t) \mapsto (x, u(x) + tv(x), u'(x) + tv'(x))$  su  $[a, b] \times [-1, 1]$  è continua e quindi ha immagine compatta. Pertanto  $\frac{d}{dt} f(x, u(x) + tv(x), u'(x) + tv'(x))$  è limitata in  $x$  uniformemente rispetto a  $t$ : possiamo applicare il teorema di derivazione sotto il segno di integrale.  $\square$

Ritornando al funzionale  $T: X \rightarrow \mathbb{R}$  in (3.23), ogni  $\varphi \in C_c^1([a, b])$  è una variazione ammissibile di  $u$  rispetto a  $X$  comunque preso  $u \in X$ . Questo si verifica tutte le volte che  $X$  è un sottoinsieme di  $C^1([a, b])$  ottenuto prescrivendo i dati al bordo. In tal caso l'equazione (3.24), assieme a quanto asserito nella Proposizione 3.7.8, dà:

$$\int_a^b \left[ f_u(x, u(x), u'(x))\varphi + f_\xi(x, u(x), u'(x))\varphi' \right] dx = 0$$

per ogni  $\varphi \in C_c^1([a, b])$ .



Se ora supponiamo che  $f$  sia di classe  $C^2$  e che  $u \in C^1([a, b]) \cap C^2((a, b))$ , un'applicazione della regola di integrazione per parti dà:

$$\int_a^b \left[ f_u(x, u(x), u'(x)) - \frac{d}{dx} f_\xi(x, u(x), u'(x)) \right] \varphi dx = 0 \quad (3.26)$$

per ogni  $\varphi \in C_c^1([a, b])$ .

Ciò implica che la funzione in parentesi quadre sia nulla per ogni  $x \in (a, b)$ . Per dimostrare ciò supponiamo che esista  $\bar{x}$  tale che  $[\dots](\bar{x}) > 0$ ; allora dovrebbe essere  $[\dots](x) > 0$  in tutto un intorno aperto  $I$  di  $\bar{x}$ . Detta  $\varphi$  una funzione  $C_c^1([a, b])$  che sia nulla su  $[a, b] \setminus I$  e strettamente positiva in  $I$ , l'integrale a primo membro in (3.26) sarebbe strettamente positivo, contro quanto assunto. Concludiamo pertanto con il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 3.7.9 *Se  $u \in C^1([a, b]) \cap C^2((a, b))$  risolve il problema (P), con  $f$  di classe  $C^2$ , allora  $u$  soddisfa l'equazione di Eulero:*

$$\frac{d}{dx} (f_\xi(x, u, u')) = f_u(x, u, u') \quad \text{in } (a, b).$$

DEFINIZIONE 3.7.10 *Diciamo estrema del funzionale  $F$  ogni soluzione  $u \in C^1([a, b]) \cap C^2((a, b))$  dell'equazione di Eulero.*

OSSERVAZIONE 3.7.11 *Se  $f$  non dipende esplicitamente da  $x$  allora la funzione*

$$f(u, u') - u' f_\xi(u, u')$$

*è un integrale primo del funzionale  $F$ , cioè è costante lungo ogni estrema (qui  $f_{u'}$  sta per  $f_\xi$ ). Infatti:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (f(u, u') - u' f_\xi(u, u')) = \\ f_u u' + f_\xi u'' - u'' f_\xi - u' \frac{d}{dx} f_\xi = f_u u' - u' f_u = 0. \end{aligned}$$

**Appendice B: forme differenziali lineari**

Ricordiamo la definizione di differenziale.

Sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ , con  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $x_0$  un punto di  $\Omega$ . Diciamo che la funzione  $f$  è differenziabile in  $x_0$  se esiste  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  lineare tale che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{|h|} = 0. \tag{3.27}$$

L'applicazione  $A$  è detta *differenziale* di  $f$  in  $x_0$  e indicata con

$$df(x_0) \text{ oppure } (df)_{x_0}$$

Se  $k = 1$  il differenziale  $df(x_0)$  è un elemento del duale  $(\mathbb{R}^n)^*$  di  $\mathbb{R}^n$ .

La (3.27) può anche essere riscritta come:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0,$$

od anche

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Pertanto:

*l'applicazione  $x \mapsto f(x_0) + \langle df(x_0), x - x_0 \rangle$  è la funzione affine che meglio approssima  $f$  nell'intorno del punto  $x_0$ .*

Si dimostra che

$$\langle df(x_0), h \rangle = Df(x_0) \cdot h \quad \text{con } Df(x_0) \text{ matrice jacobiana di } f \text{ in } x_0.$$

Si visualizzino i casi  $n = k = 1$  e  $n = 2, k = 1$ .

È utile interpretare il differenziale anche in altra forma. Dato  $v \in \mathbb{R}^n$  studiamo il modo in cui viene trasformato da  $f$  il moto di un punto mobile che passa per  $x_0$  con velocità  $v$ . Pertanto consideriamo una curva

$$\varphi: (-1, 1) \rightarrow \Omega \quad \text{con } \varphi(0) = x_0, \quad \varphi'(0) = v,$$

e valutiamo la velocità del punto  $f(\varphi(t))$  all'istante  $t = 0$ . Risulta:

$$\left. \frac{d}{dt} f(\varphi(t)) \right|_{t=0} = Df(\varphi(0)) \cdot \varphi'(0) = Df(x_0) \cdot v,$$

cioè

$$\left. \frac{d}{dt} f(\varphi(t)) \right|_{t=0} = \langle df(x_0), v \rangle. \tag{3.28}$$

pertanto

*il differenziale  $df$  dà la trasformazione dei vettori velocità tramite la funzione  $f$ .*

~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~

La (3.28) trova facile generalizzazione al caso in cui  $f$  sia una funzione fra “sottoinsiemi  $d$ -dimensionali regolari in  $\mathbb{R}^n$ ” (più precisamente “varietà differenziabili”), come ad esempio le curve e le superficie  $C^1$  in  $\mathbb{R}^3$ . Pertanto, consideriamo il caso di una funzione  $f: M \rightarrow N$ , con  $M$  e  $N$ , per fissare le idee, superficie in  $\mathbb{R}^3$ . Come svolto sopra per una funzione su un aperto di uno spazio euclideo, analizziamo come  $f$  trasforma il moto di un punto su  $M$ . Quest'ultimo viene dato



La sequenza

$$dx_1, dx_2, \dots, dx_n$$

forma una base del duale di  $\mathbb{R}^n$ ; infatti se  $A \in (\mathbb{R}^n)^*$  e  $v = \sum_j v^j e_j$ , allora:

$$\langle A, v \rangle = \sum_j v^j \langle A, e_j \rangle = \sum_j \alpha_j \langle dx_j, v \rangle = \langle \sum_j \alpha_j dx_j, v \rangle,$$

dove si è posto  $\alpha_j = \langle A, e_j \rangle$ . Quindi

$$A = \sum_j \alpha_j dx_j.$$

In particolare, sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  un'applicazione differenziabile in  $x_0$ ; allora

$$\langle df(x_0), v \rangle = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} v^j,$$

per cui

$$df(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

DEFINIZIONE 3.7.12 Diciamo forma differenziale lineare (o 1-forma) di classe  $C^0$  su un aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$  l'assegnazione continua in ogni punto di  $\Omega$  di un elemento di  $(\mathbb{R}^n)^*$ .

Quindi una forma  $\omega$  su  $\Omega$  può essere scritta come:

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i, \quad a_i \in C^0(\Omega).$$

Un caso particolare è chiaramente il differenziale di una funzione  $C^1$ . Una forma  $\omega$  su  $\Omega$  si dice *esatta* se esiste  $H \in C^1(\Omega)$  tale che  $\omega = dH$ .

Dalle considerazioni svolte sopra si può cogliere come il concetto di forma differenziale lineare possa essere esteso al caso in cui anzichè un aperto  $\Omega$  si abbia, ad esempio, una superficie.

Una forma differenziale  $\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i$  su  $\Omega$  si dice *chiusa* se

$$\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_i} \quad \text{per ogni } x \in \Omega.$$

Se i coefficienti  $a_i$  sono di classe  $C^1$ , allora il Teorema di Schwarz sull'inversione dell'ordine di derivazione implica che se  $\omega$  è esatta allora è chiusa. Si può dimostrare che il viceversa vale se  $\Omega$  è semplicemente connesso. In quest'ultimo caso la verifica dell'esattezza di una forma è immediata.

~ ~ ~ ~ ~

Ricordiamo infine la nozione di *pull-back* di una forma differenziale.

Siano  $G \subseteq \mathbb{R}^m$  e  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperti e  $\phi: G \rightarrow \Omega$  di classe  $C^1$ . Sia  $\omega(x) = \sum_i a_i(x) dx_i$  una forma differenziale su  $\Omega$ . Per ogni  $\xi \in G$  e  $v \in \mathbb{R}^m$  poniamo

$$\langle (\phi^* \omega)(\xi), v \rangle := \langle \omega(\phi(\xi)), \langle (d\phi)_\xi, v \rangle \rangle$$

(la forma  $\omega$  agisce nel punto immagine  $\phi(\xi)$  sul vettore trasformato di  $v$  tramite l'applicazione differenziale  $d\phi$  in  $\xi$ ). In ogni punto  $\xi$  di  $G$  è quindi assegnata un'applicazione lineare su  $\mathbb{R}^m$ ,

ottenendo pertanto una forma differenziale  $\phi^*\omega$  su  $G$ , detta *pull-back* di  $\omega$  tramite  $\phi$ . La forma  $\phi^*\omega$  è il modo più naturale di trasportare la forma  $\omega$  da  $\Omega$  su  $G$  tramite  $\phi$ .

Posto  $\phi = (\phi^i)_i$ , poiché  $\langle dx_i, (d\phi)_\xi(v) \rangle = (d\phi^i)_\xi(v)$ , possiamo scrivere  $\phi^*\omega$  come

$$\phi^*\omega = \sum_{i=1}^n (a_i \circ \phi) d\phi^i.$$

Formalmente, questa si ottiene dall'espressione di  $\omega(x)$  sostituendo la variabile  $x$  con  $\phi(\xi)$ .



## Capitolo 4

# EQUAZIONI E SISTEMI DIFFERENZIALI LINEARI

Ci occupiamo ora di (sistemi di) equazioni differenziali *lineari*, cioè della forma

$$x' = A(t)x + b(t), \quad (4.1)$$

dove la funzione incognita  $x(\cdot)$  è a valori in  $\mathbb{R}^n$ , il coefficiente  $A$  è una matrice  $n \times n$  a elementi reali continui in un intervallo  $I$ , mentre  $b$  è una funzione continua in  $I$  a valori in  $\mathbb{R}^n$ :

$$A \in C^0(I; M^{n \times n}(\mathbb{R})), \quad b \in C^0(I; \mathbb{R}^n).$$

Il prodotto  $A(t)x(t)$  è inteso come usuale prodotto fra una matrice  $n \times n$  e un vettore (colonna)  $x(t)$ .<sup>15</sup>

Un esempio di sistema del tipo (4.1) è stato incontrato nello studio dei circuiti accoppiati (vedi (1.19)).

Sappiamo (vedi l'Osservazione 2.4.5) che ogni soluzione di (4.1) è prolungabile a tutto l'insieme  $I$  di continuità dei coefficienti, per cui assumiamo

$$x: I \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

L'equazione

$$x' = A(t)x \quad (4.2)$$

verrà detta *equazione omogenea* associata all'equazione (4.1); per contro, ci si riferisce a volte all'equazione (4.1), come all'equazione *completa*.

Osserviamo inoltre che sono chiaramente soddisfatte le condizioni che assicurano l'unicità per i problemi di Cauchy (il secondo membro della (4.1) è lineare in  $x$ ). Indicheremo la soluzione (unica) del problema

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con  $x(\cdot, t_0, x_0)$ .

**OSSERVAZIONE 4.0.13** Se le funzioni  $A$  e  $b$  nell'equazione (4.1) sono di classe  $C^1$ , allora ogni soluzione  $x$  ha la derivata  $x'$  di classe  $C^1$ . Per induzione otteniamo

$$A, b \in C^k \Rightarrow x \in C^{k+1}$$

<sup>15</sup>Per comodità, se il contesto è sufficientemente chiaro, scriveremo a volte in riga anche i vettori colonna.

per  $k = 0, 1, \dots$ . Se  $A$  e  $b$  sono di classe  $C^\infty$  anche le soluzioni sono pertanto di classe  $C^\infty$ .

Analizziamo ora la struttura dell'insieme delle soluzioni, iniziando dal caso dell'equazione omogenea (4.2).

#### 4.1 EQUAZIONE OMOGENEA. MATRICE RISOLVENTE

Basilare è il seguente semplice risultato sulla struttura dell'insieme delle soluzioni di un'equazione omogenea.

**TEOREMA 4.1.1 (DI STRUTTURA PER L'EQUAZIONE OMOGENEA)** *L'insieme  $V$  delle soluzioni dell'equazione (4.2) è un sottospazio vettoriale di  $C^1(I; \mathbb{R}^n)$ . Per ogni  $t_0 \in I$  l'applicazione*

$$\phi^{t_0} : \xi \mapsto x(\cdot, t_0, \xi) : \mathbb{R}^n \rightarrow V$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali. Pertanto  $V$  ha dimensione  $n$ .

*Dimostrazione.* Dati  $u_1, u_2 \in V$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , la funzione  $u = \alpha u_1 + \beta u_2$  è una soluzione di (4.2):

$$u' = \alpha u_1' + \beta u_2' = \alpha A(t)u_1 + \beta A(t)u_2 = A(t)(\alpha u_1 + \beta u_2) = A(t)u.$$

Quindi  $V$  è un sottospazio di  $C^1(I; \mathbb{R}^n)$ .

Siano assegnati  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e indichiamo con  $u_1$  e  $u_2$  le soluzioni con dati  $\xi_1$  e  $\xi_2$  per  $t = t_0$ , rispettivamente, cioè  $u_1 = \phi^{t_0}(\xi_1)$  e  $u_2 = \phi^{t_0}(\xi_2)$ ; la soluzione  $u = \alpha u_1 + \beta u_2$  assume in  $t_0$  il valore  $\alpha \xi_1 + \beta \xi_2$ , quindi è la soluzione  $\phi^{t_0}(\alpha \xi_1 + \beta \xi_2)$ , cioè:

$$\alpha \phi^{t_0}(\xi_1) + \beta \phi^{t_0}(\xi_2) = \alpha u_1 + \beta u_2 = \phi^{t_0}(\alpha \xi_1 + \beta \xi_2).$$

Ciò dice che  $\phi^{t_0}$  è un omomorfismo. Del resto se la funzione  $u = \phi^{t_0}(\xi)$  è l'elemento nullo di  $V$ , allora  $\xi = u(t_0) = 0$ ; pertanto  $\phi^{t_0}$  è iniettivo. La suriettività è ovvia (ogni soluzione  $u$  è definita anche in  $t_0$ , per cui  $u = \phi^{t_0}(\xi)$  con  $\xi = u(t_0)$ ).

Dall'essere  $\phi^{t_0}$  un isomorfismo discende che la dimensione di  $V$  è  $n$ .  $\square$

**COROLLARIO 4.1.2** *Siano  $u_1, u_2, \dots, u_n$  in  $V$  e  $t_0 \in I$ . Allora  $u_1, u_2, \dots, u_n$  sono linearmente indipendenti (in  $V$ ) se e solo se  $u_1(t_0), u_2(t_0), \dots, u_n(t_0)$  sono linearmente indipendenti (in  $\mathbb{R}^n$ ).*

*Dimostrazione.* Discende immediatamente dal fatto che  $\phi^{t_0}$  è un isomorfismo.  $\square$

**OSSERVAZIONE 4.1.3** Quanto detto sopra continua a sussistere ambientando, con ovvia estensione, lo studio in  $\mathbb{C}$  (e considerando, più in generale, matrici a coefficienti complessi). Il passaggio al campo  $\mathbb{C}$ , algebricamente chiuso, renderà più agevole lo studio dei sistemi a coefficienti costanti (vedi §§ 4.4 e 4.5).

Dal corollario precedente segue che per verificare l'indipendenza di  $n$  soluzioni  $u_1, u_2, \dots, u_n$  è sufficiente verificare la lineare indipendenza di  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$  per un qualche  $t \in I$ , quindi valutare l'annullarsi o meno di:

$$W(t) = \det X(t),$$

dove

$$X(t) = (u_1(t) \mid u_2(t) \mid \dots \mid u_n(t)) \tag{4.3}$$



è la matrice che ha nelle colonne le soluzioni  $u_1, \dots, u_n$ . La matrice  $X(t)$  e il suo determinante  $W(t)$  sono detti, rispettivamente matrice *wronskiana*<sup>16</sup> e determinante *wronskiano* delle  $n$  soluzioni  $u_1, \dots, u_n$ .

OSSERVAZIONE 4.1.4 Dare  $n$  soluzioni dell'equazione (4.2) equivale a dare una soluzione dell'equazione matriciale

$$X' = A(t)X$$

(le colonne di  $X(t)$  sono soluzioni di  $x' = A(t)x$ ).

ESEMPIO. Consideriamo un caso elementare per illustrare i concetti esposti:

$$\begin{cases} x_1' = \omega x_2 \\ x_2' = -\omega x_1 \end{cases} \quad \text{cioè } x' = Ax \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo (vedi § 1.9) che questo sistema è equivalente all'equazione:

$$x_2'' + \omega^2 x_2 = 0.$$

Le soluzioni sono fornite da (si ricordi la (1.14) del Cap. I):

$$x_2(t) = K \cos(\omega t + \varphi), \quad K \geq 0, \varphi \in \mathbb{R};$$

Inoltre  $x_1 = -x_2'/\omega$ , per cui:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \sin(\omega t + \varphi) \\ K \cos(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Da questa formula generale possiamo ricavare, in particolare, le soluzioni  $u_1$  e  $u_2$  del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = \xi \end{cases} \quad (4.5)$$

con  $\xi = e_1$  e  $\xi = e_2$ ; le funzioni  $u_1$  e  $u_2$  si ottengono per  $K = 1$  e  $\varphi = \pi/2$  o  $\varphi = 0$ , rispettivamente:

$$u_1 = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -\sin \omega t \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

Queste sono linearmente indipendenti, come si può ricavare osservando che la loro matrice wronskiana  $X(t)$  ha sempre determinante uguale a 1 (basterebbe osservare che, per come sono state definite  $u_1$  e  $u_2$ , risulta  $\det X(0) = \det I = 1$ , con  $I$  matrice identità). Dalla (4.4) si deduce che la generica soluzione  $x(\cdot)$  si esprime come combinazione lineare di  $u_1$  e  $u_2$ :

$$x(t) = \begin{pmatrix} K \sin \omega t \cos \varphi + K \cos \omega t \sin \varphi \\ K \cos \omega t \cos \varphi - K \sin \omega t \sin \varphi \end{pmatrix} = K(\sin \varphi)u_1 + K(\cos \varphi)u_2 \quad (4.6)$$

(al variare di  $K$  e  $\varphi$  le costanti  $K \sin \varphi$  e  $K \cos \varphi$  danno una qualunque coppia  $(c_1, c_2)$  di costanti reali). Notiamo che  $K \sin \varphi = x_1(0)$  e  $K \cos \varphi = x_2(0)$ ; del resto è evidente che la soluzione del problema (4.5) per un arbitrario  $\xi$  è

$$x(t) = X(t)\xi,$$

poiché le soluzioni  $u_1$  e  $u_2$  sono state scelte con i valori  $e_1$  ed  $e_2$ , rispettivamente, in  $t = 0$ .

Generalizziamo ora queste osservazioni.

Dato  $\tau \in I$ , sia  $u_i(\cdot, \tau)$  la soluzione di

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(\tau) = \xi \end{cases} \quad (4.7)$$

con  $\xi = e_i$ , e si definisca

$$R(\cdot, \tau) = (u_1(\cdot, \tau) \mid u_2(\cdot, \tau) \mid \dots \mid u_n(\cdot, \tau)); \quad (4.8)$$

la matrice le cui colonne sono date dalle funzioni  $u_i(\cdot, \tau)$ ; si tratta di soluzioni linearmente indipendenti poiché  $R(\tau, \tau) = I$  (matrice identità).

<sup>16</sup>dal nome del matematico polacco Hoëné Wronski (1778-1853).

DEFINIZIONE 4.1.5 La matrice  $R$  è detta matrice risolvente del sistema  $x' = A(t)x$ .

PROPOSIZIONE 4.1.6 Comunque dati  $\tau \in I$  e  $\xi \in \mathbb{R}^n$  la soluzione del problema di Cauchy (4.7) si può esprimere nella forma:

$$x(t) = R(t, \tau)\xi.$$

Infatti,  $R(\cdot, \tau)\xi$  è una soluzione del sistema  $x' = A(t)x$  e all'istante  $t = \tau$  assume il valore  $R(\tau, \tau)\xi = I\xi = \xi$ .

OSSERVAZIONE 4.1.7 La matrice  $R$  è univocamente individuata come soluzione dell'equazione:

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t}(t, \tau) = A(t)R(t, \tau) \\ R(\tau, \tau) = I. \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 4.1.8 Se il sistema è autonomo ( $A$  costante) allora (si ricordi la (2.21) del Cap. II)

$$R(t, \tau) = R(t - \tau, 0).$$

Nell'esempio precedente la matrice  $A$  è costante, per cui la soluzione del problema (4.7) per  $\xi = e_i$  non è altro che  $t \mapsto u_i(t - \tau)$ , dove  $u_i$  è la soluzione determinata per  $\tau = 0$ ; quindi in questo caso

$$R(t, \tau) = \begin{pmatrix} \cos \omega(t - \tau) & \sin \omega(t - \tau) \\ -\sin \omega(t - \tau) & \cos \omega(t - \tau) \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Se  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$  è una qualunque  $n$ -upla di soluzioni di (4.2), comunque preso  $\tau \in I$  si ha

$$\bar{u}_i(t) = R(t, \tau)\bar{u}_i(\tau),$$

o anche, indicando con  $X$  la matrice wronskiana di  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$

$$X(t) = R(t, \tau)X(\tau).$$

Se poi le  $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$  sono linearmente indipendenti allora  $X$  è invertibile, per cui possiamo esprimere la matrice risolvente  $R$  tramite  $X$ :

$$R(t, \tau) = X(t)X(\tau)^{-1}. \quad (4.10)$$

Terminiamo il paragrafo con un'interessante relazione soddisfatta dalla matrice wronskiana di una  $n$ -upla di soluzioni dell'equazione omogenea (4.2).

TEOREMA 4.1.9 (LIOUVILLE) Sia  $X$  una soluzione di

$$X' = A(t)X \quad (X \in C^1(I; M^{n \times n})).$$

Allora il determinante wronskiano  $W(t)$  di  $X(t)$  è soluzione di

$$z' = (\text{tr } A(t))z. \quad (4.11)$$

Quindi

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^t (\text{tr } A(s)) ds$$

comunque presi  $t, t_0 \in I$ .

*Dimostrazione.* Abbiamo visto che se  $X' = AX$  allora

$$X(t) = R(t, \tau)X(\tau),$$

per cui (teorema di Binet), comunque presi  $t, \tau \in I$ ,

$$W(t) = \det X(t) = \det R(t, \tau) \det X(\tau).$$

Quindi

$$W'(t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} \det R(t, \tau) \right) W(\tau). \quad (4.12)$$

Ricordiamo che la derivata di un determinante si ottiene come somma dei determinanti delle matrici ottenute derivando successivamente le singole colonne.<sup>17</sup> Allora:

$$\frac{\partial}{\partial t} \det R(t, \tau) = \sum_{j=1}^n \det(u_1(t, \tau) \mid \dots \mid u'_j(t, \tau) \mid \dots \mid u_n(t, \tau)).$$

Osserviamo che  $u'_j(t, \tau) = A(t)u_j(t, \tau)$  e poniamo  $t = \tau$ : ricordando che  $u_i(\tau, \tau) = e_i$  per ogni  $i$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t} \det R(t, \tau) \right|_{t=\tau} &= \sum_{j=1}^n \det(e_1 \mid \dots \mid A(\tau)e_j \mid \dots \mid e_n) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{jj}(\tau) = \operatorname{tr} A(\tau). \end{aligned}$$

Di conseguenza la (4.12) per  $t = \tau$  dà:

$$W'(\tau) = \operatorname{tr} A(\tau)W(\tau).$$

In base all'arbitrarietà di  $\tau$ , questo conclude la dimostrazione.  $\square$

## 4.2 EQUAZIONE COMPLETA. VARIAZIONE DELLE COSTANTI

Consideriamo ora l'equazione (4.1). Immediato è il seguente risultato di struttura delle soluzioni.

**TEOREMA 4.2.1 (DI STRUTTURA DELL'EQUAZIONE COMPLETA)** *Se  $\bar{x}$  è una soluzione dell'equazione completa (4.1) allora tutte e sole le soluzioni dell'equazione completa stessa sono date da*

$$x = x_o + \bar{x}$$

*al variare di  $x_o$  fra le soluzioni dell'equazione omogenea associata (4.2).*

<sup>17</sup>Il determinante di una matrice  $A(t) = (a_{ij}(t))$  si può esprimere come

$$\det A(t) = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} a_{\sigma(1)1}(t) a_{\sigma(2)2}(t) \dots a_{\sigma(n)n}(t),$$

dove  $\sigma$  varia fra tutte le permutazioni dell'insieme  $\{1, \dots, n\}$  e  $(-1)^{\sigma}$  indica il segno della permutazione  $\sigma$ . Allora l'usuale regola di derivazione del prodotto dà:

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} a_{\sigma(1)1}(t) \dots a'_{\sigma(1)i}(t) \dots a_{\sigma(n)n}(t);$$

Ciascun addendo della somma  $\sum_i$  non è altro che il determinante della matrice ottenuta derivando soltanto la  $i$ -esima colonna  $A_i(t)$ , quindi:

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \sum_{i=1}^n \det(A_1(t) \dots A'_i(t) \dots A_n(t)).$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione ricalca quanto visto in merito alla Proposizione 3.2.1.  $\square$

*Variatione delle costanti.* Mostriamo come sia possibile individuare un integrale particolare  $\bar{x}$  dell'equazione completa (4.1) una volta noto un insieme di  $n$  soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata (4.2).

Sia pertanto  $X$  una soluzione dell'equazione matriciale  $X' = A(t)X$ , con  $\det X(t) \neq 0$ . Allora le soluzioni di (4.2) si esprimono come  $X(t)\xi$  al variare di  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . In analogia con quanto già svolto al §3.2, cerchiamo  $\bar{x}$  della forma

$$\bar{x}(t) = X(t)\xi(t),$$

per un'opportuna funzione  $\xi$ . Questa deve allora soddisfare

$$X'\xi + X\xi' = AX\xi + b,$$

da cui, essendo  $X' = AX$ ,

$$\xi'(t) = X(t)^{-1}b(t).$$

Come funzione  $\xi$  possiamo quindi scegliere una qualunque primitiva di  $X(t)^{-1}b(t)$ :

$$\xi(t) = \int X(t)^{-1}b(t) dt.$$

Allora la famiglia delle soluzioni dell'equazione (4.2) diventa:

$$x(t) = X(t)\left(K + \int X(s)^{-1}b(s) ds\right) \quad (K \in \mathbb{R}^n),$$

( $X(t)K$  al variare di  $K \in \mathbb{R}^n$  fornisce le soluzioni dell'equazione omogenea); la costante  $K$  può essere incorporata nell'integrale indefinito successivo.

È significativo mettere in evidenza la matrice risolvente nell'espressione di  $\bar{x}(t)$  ora determinata. Fissato  $t_0 \in I$ , sia  $\xi(t) = \int_{t_0}^t X(s)^{-1}b(s) ds$  e

$$\bar{x}(t) = X(t) \int_{t_0}^t X(s)^{-1}b(s) ds.$$

Ricordando la (4.10) abbiamo:

$$\bar{x}(t) = \int_{t_0}^t R(t, s)b(s) ds.$$

PROPOSIZIONE 4.2.2 *La funzione  $\bar{x}$  sopra definita è una soluzione del sistema lineare  $x' = A(t)x + b(t)$ .*

ESEMPIO Riprendiamo l'esempio precedente aggiungendo un termine  $b(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$  non nullo:

$$\begin{cases} x_1' = \omega x_2 + t \\ x_2' = -\omega x_1 \end{cases}.$$

Già abbiamo calcolato la matrice risolvente: si veda la (4.9). Scegliamo  $t_0 = 0$ ; otteniamo la soluzione

$$\bar{x}(t) = \int_0^t R(t, s)b(s) ds = \begin{pmatrix} \int_0^t s \cos \omega(t-s) ds \\ -\int_0^t s \sin \omega(t-s) ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega^2}(1 - \cos \omega t) \\ -\frac{1}{\omega}\left(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t\right) \end{pmatrix}.$$

Se riprendiamo le soluzioni (4.6) del sistema omogeneo associato, concludiamo che le soluzioni del sistema proposto sono date da

$$\begin{cases} x_1 = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2}(1 - \cos \omega t) \\ x_2 = -c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t - \frac{1}{\omega}\left(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t\right) \end{cases}$$

al variare di  $c_1$  e  $c_2$  in  $\mathbb{R}$ .

### 4.3 ESPONENZIALE DI UNA MATRICE

Nel prossimo paragrafo vedremo come l'applicazione del metodo delle approssimanti successive per l'equazione omogenea  $x' = Ax$ , con  $A$  matrice costante, porti alla considerazione della successione di funzioni:

$$t \mapsto I + tA + \frac{1}{2}(tA)^2 + \dots + \frac{1}{m!}(tA)^m.$$

Pertanto trattiamo preliminarmente il problema della convergenza di questo tipo di funzioni.

Sia  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$  una matrice  $n \times n$  ad elementi in  $\mathbb{C}$ ; questa induce in modo canonico un'applicazione lineare:

$$x \mapsto Ax : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n.$$

Definiamo  $\|A\|$  come la norma di tale operatore, cioè:

$$\|A\| = \max\{|Ax| : |x| \leq 1\}.$$

Le seguenti proprietà sono di verifica immediata.

PROPOSIZIONE 4.3.1 *Siano  $A, B \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ ; allora*

- a)  $|Ax| \leq \|A\| |x|$ ;
- b)  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ ;
- c)  $\|A^m\| \leq \|A\|^m$ .

Ricordiamo che in uno spazio finito-dimensionale (nel caso attuale  $M^{n \times n}(\mathbb{C})$  non è altro che  $\mathbb{C}^{n^2}$ ) tutte le norme sono equivalenti. La nozione (topologica) di convergenza è pertanto indipendente dalla norma scelta.

In particolare, data una successione  $(A_k)$  in  $M^{n \times n}(\mathbb{C})$ , diciamo che  $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$  è *convergente* se tale è la successione delle sue somme parziali  $(\sum_{k=0}^m A_k)_m$ . Diremo inoltre che la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$  *converge assolutamente* se è convergente la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\|$ . Come per le serie numeriche, si dimostra che se una serie è assolutamente convergente allora è convergente (si utilizzi il criterio di Cauchy).

TEOREMA 4.3.2 *Data  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ , la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

*converge assolutamente. Indichiamo la somma con  $e^A$ . Risulta inoltre:*

$$\|e^A\| \leq e^{\|A\|}.$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione è immediata poiché

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{1}{k!} \|A\|^k$$

e la serie di termine generale  $\|A\|^k/k!$  converge a  $e^{\|A\|}$ .  $\square$

Della funzione esponenziale reale la funzione ora introdotta conserva la proprietà fondamentale di trasformare la somma in prodotto. Più precisamente vale il seguente risultato.

**TEOREMA 4.3.3** *Siano  $A, B \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ . Se  $AB = BA$  allora*

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

*Dimostrazione.* Poiché  $A$  e  $B$  commutano possiamo utilizzare l'usuale sviluppo della potenza del binomio  $(A + B)^k$ , per cui:

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} A^j B^{k-j} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{A^j}{j!} \frac{B^{k-j}}{(k-j)!}. \end{aligned}$$

Si ottiene la serie prodotto delle due serie assolutamente convergenti

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}, \quad \sum_{h=0}^{\infty} \frac{B^h}{h!};$$

come enunciato nel successivo lemma, la serie prodotto converge al prodotto delle due serie, e ciò conclude la dimostrazione.  $\square$

**LEMMA 4.3.4** *Siano*

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j, \quad \sum_{h=0}^{\infty} B_h$$

*due serie in  $M^{n \times n}(\mathbb{C})$  assolutamente convergenti. Allora la serie prodotto definita da:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k A_j B_{k-j}$$

*è assolutamente convergente e ha per somma il prodotto delle somme delle due serie fattore.*

*Dimostrazione.* Indichiamo con  $C_k$  il termine generale della serie prodotto. Chiaramente

$$\|C_k\| \leq \sum_{j=0}^k \|A_j\| \|B_{k-j}\|.$$

Il secondo membro non è altro che il termine generale della serie prodotto di  $\sum \|A_j\|$  e  $\sum \|B_h\|$ ; ne segue che  $\sum \|C_k\|$  è convergente, cioè che la serie  $\sum C_k$  è assolutamente convergente, quindi

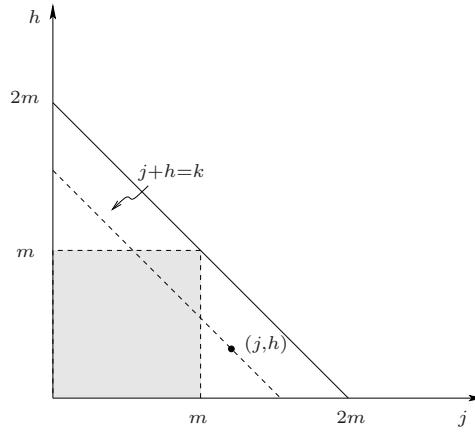


Figura 4.1 - L'insieme degli indici  $(j, h)$  per i quali  $0 \leq j+h \leq 2m$  si decompone in  $[0, m]^2$  e nei due triangoli rimanenti  $\{m+1 \leq j \leq 2m, 0 \leq h \leq 2m-j\}$  e  $\{m+1 \leq h \leq 2m, 0 \leq j \leq 2m-h\}$ .

convergente. Pertanto è sufficiente calcolare il limite delle somme parziali su una particolare successione. Fissato  $m \in \mathbb{N}$ , se ripartiamo le coppie  $(j, h)$  di indici che compaiono in questa somma come indicato in Figura 4.1, abbiamo:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2m} C_k &= \sum_{k=0}^{2m} \sum_{\substack{j,h=0 \\ j+h=k}}^k A_j B_h \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{h=0}^m A_j B_h + R_1^m + R_2^m, \end{aligned}$$

dove

$$R_1^m = \sum_{j=m+1}^{2m} \sum_{h=0}^{2m-j} A_j B_h, \quad R_2^m = \sum_{h=m+1}^{2m} \sum_{j=0}^{2m-h} A_j B_h.$$

Risulta:

$$\|R_1^m\| \leq \left( \sum_{j=m+1}^{2m} \|A_j\| \right) \left( \sum_{h=0}^{\infty} \|B_h\| \right) \rightarrow 0 \quad \text{per } m \rightarrow +\infty.$$

Così pure per  $R_2^m$ . Poiché  $\sum_{j=0}^m \sum_{h=0}^m A_j B_h = (\sum_{j=0}^m A_j)(\sum_{h=0}^m B_h)$ , concludiamo che

$$\sum_{k=0}^{2m} C_k \rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} A_j \sum_{h=0}^{\infty} B_h \quad \text{per } m \rightarrow +\infty. \quad \square$$

**COROLLARIO 4.3.5** La matrice  $e^A$  è invertibile e risulta  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ .

*Dimostrazione.*  $I = e^0 = e^{A-A} = e^A e^{-A}$ .  $\square$

Notiamo infine che se  $P$  è una matrice invertibile, allora

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P. \quad (4.13)$$

Infatti  $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^k P$  per ogni  $k$ , per cui è sufficiente applicare la definizione.

#### 4.4 SISTEMI OMOGENEI AUTONOMI

Consideriamo ora il caso di un sistema lineare omogeneo e autonomo:

$$x' = Ax. \tag{4.14}$$

Sappiamo che la matrice risolvete  $R(t, \tau)$  soddisfa alla condizione  $R(t, \tau) = R(t - \tau, 0)$ , per cui possiamo limitarci a calcolare  $R(t, 0)$ , cioè (si ricordi l'Osservazione 4.1.7) la soluzione dell'equazione matriciale:

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = I. \end{cases} \tag{4.15}$$

La formulazione integrale del problema diventa:

$$X(t) = I + A \int_0^t X(s) ds.$$

Applichiamo il metodo iterativo delle approssimanti successive (come utilizzato nel Teorema 2.1.3). Posto:

$$T: X \mapsto I + A \int_0^t X(s) ds : C^0(I; M^{n \times n}) \rightarrow C^0(I; M^{n \times n}),$$

consideriamo la successione:

$$\begin{aligned} X_0(t) &\equiv I \\ X_1(t) &= (TX_0)(t) = I + tA \\ X_2(t) &= (TX_1)(t) = I + A \int_0^t (I + sA) ds = I + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 \\ &\dots \\ X_{m+1}(t) &= (TX_m)(t) = I + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \dots + \frac{1}{(m+1)!}t^{m+1}A^{m+1} \\ &\dots \end{aligned}$$

Per quanto visto nel paragrafo precedente la successione  $(X_m(t))$  converge a  $X(t) = e^{tA}$ . Inoltre la convergenza è uniforme sui compatti di  $\mathbb{R}$  (se  $|t| \leq M$  allora  $\|X_m(t) - e^{tA}\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} (M\|A\|)^k/k! \rightarrow 0$  per  $m \rightarrow +\infty$ ). Pertanto dall'uguaglianza

$$X_{m+1}(t) = I + A \int_0^t X_m(s) ds$$

ricaviamo che  $X$  è soluzione dell'equazione (4.15), quindi coincide con  $R(\cdot, 0)$ . Concludiamo che

$$R(t, \tau) = e^{(t-\tau)A}.$$

Riassumiamo quanto ottenuto nel seguente enunciato:

TEOREMA 4.4.1 *Comunque fissato  $\tau \in \mathbb{R}$ , la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(\tau) = x_0 \end{cases}$$

è data da

$$x(t) = e^{(t-\tau)A}x_0.$$



Pertanto, la famiglia di tutte le soluzioni dell'equazione  $x' = Ax$  è data dalle funzioni:

$$x(t) = e^{tA}\xi \quad \text{al variare di } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ .

Come vedremo nel prossimo paragrafo, nel calcolo della matrice esponenziale sarà utile passare al calcolo dell'esponenziale di un'opportuna matrice simile, sfruttando quindi la relazione (4.13): se  $P$  è una matrice  $n \times n$  invertibile, posto  $\tilde{A} = P^{-1}AP$ , la matrice risolvente del sistema (4.14) è

$$e^{(t-\tau)A} = Pe^{(t-\tau)\tilde{A}}P^{-1}. \quad (4.16)$$

Comunque, poiché la generica soluzione del sistema (4.14) è  $x(t) = e^{tA}\xi = Pe^{t\tilde{A}}P^{-1}\xi$ , per un qualche  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , l'integrale generale può essere espresso come

$$x(t) = Pe^{t\tilde{A}}C \quad \text{al variare di } C \in \mathbb{R}^n \quad (4.17)$$

(l'arbitrarietà di  $\xi$  in  $\mathbb{R}^n$  si traduce nell'arbitrarietà di  $C \in \mathbb{R}^n$ ). Possiamo anche interpretare questa relazione come il risultato di un cambiamento lineare di variabile nel sistema  $x' = Ax$ ; infatti, posto

$$x = P\tilde{x},$$

il sistema diventa

$$\tilde{x}' = \tilde{A}\tilde{x} \quad \text{con } \tilde{A} = P^{-1}AP.$$

Poiché  $\tilde{x}(t) = e^{t\tilde{A}}C$ , ne scende ancora la (4.17).

OSSERVAZIONE 4.4.2 Sarà utile pensare alla matrice  $A$  come alla matrice associata a un operatore lineare  $T$  su uno spazio vettoriale di dimensione  $n$  rispetto a una data base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ : ad esempio la base canonica su  $V = \mathbb{C}^n$  e  $T = T^A: x \mapsto Ax: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Ogni matrice  $\tilde{A} = P^{-1}AP$  viene di conseguenza interpretata come la matrice associata a  $T$  rispetto alla base  $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n)$ , dove  $\tilde{e}_j = \sum_i p_{ij}e_i$  (si ricordi la relazione (4.49) in Appendice): se  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  è la base canonica di  $\mathbb{C}^n$  allora  $\tilde{e}_j$  non è altro che la  $j$ -esima colonna della matrice  $P$  (vedi Osservazione 4.8.2 in Appendice).

ESERCIZIO. Dimostrare che se  $AB = BA$  allora  $Ae^B = e^B A$ .

ESERCIZIO.

a) Utilizzando la definizione di esponenziale dimostrare che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} - I}{h} = A.$$

b) Mediante la definizione di derivata verificare che

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = e^{tA}A = Ae^{tA}.$$

Rimane così verificato direttamente che  $e^{tA}x_0$  è soluzione dell'equazione  $x' = Ax$ .

### 4.5 CALCOLO DELLA MATRICE ESPONENZIALE

Data una matrice  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$ , occupiamoci del calcolo di  $e^A$ , o meglio di  $e^{tA}$  per  $t \in \mathbb{R}$ . Si tratta quindi delle soluzioni del sistema  $x' = Ax$  impostato, con ovvia estensione, in campo complesso. Porsi in  $\mathbb{C}$  permette un'esposizione più nitida dei risultati, avendosi esattamente  $n$  autovalori (contati con la rispettiva molteplicità). In un secondo momento (§ 4.5.3) vedremo come sia possibile ottenere  $n$  soluzioni *reali* linearmente indipendenti dell'equazione  $x' = Ax$  nel caso in cui la matrice  $A$  sia a coefficienti reali.

Vi sono due situazioni in cui la matrice  $e^A$  può essere esprimibile facilmente in termini finiti.

- *A matrice diagonale*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

In tal caso, per ogni  $k \in \mathbb{N}$

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}, \quad \text{per cui} \quad e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

- *A matrice nilpotente*, cioè soddisfacente la proprietà

$$\text{esiste } s \in \mathbb{N} \text{ tale che } A^s = 0.$$

In tal caso la serie che definisce  $e^A$  si riduce ad una somma finita. Un esempio importante di questo tipo è il seguente (*blocco nilpotente elementare*):

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

È facile vedere che  $N^n = 0$ , mentre le potenze  $N^k$ , con  $2 \leq k \leq n - 1$ , sono date da:

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad N^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Allora la serie che definisce  $e^{tN}$ , si riduce a:

$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(tN)^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ \vdots & & & & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Se  $A$  è nilpotente allora l'unico autovalore è  $\lambda = 0$  (con molteplicità  $n$ ). Infatti, se  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  sono tali che  $Av = \lambda v$ , allora

$$A^2v = \lambda Av = \lambda^2v.$$

Iterando il procedimento si ottiene  $A^s v = \lambda^s v$ , da cui, poiché  $v \neq 0$ , si ricava  $\lambda^s = 0$  se  $A^s = 0$ ; quindi  $\lambda = 0$ .

In realtà, ammettere il solo autovalore nullo è condizione necessaria e sufficiente perché una matrice sia nilpotente. Enunciamo questo risultato nella seguente forma:

**PROPOSIZIONE 4.5.1** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  e  $T: V \rightarrow V$  un operatore lineare. Allora  $T$  è nilpotente (cioè esiste  $s \in \mathbb{N}$  per il quale  $T^s = 0$ ) se e solo se  $T$  ammette solamente l'autovalore nullo.*

*Dimostrazione.* Come visto sopra, da  $Tv = \lambda v$  si ottiene  $T^s v = \lambda^s v$  per ogni  $s \in \mathbb{N}$ , da cui  $\lambda = 0$  se  $T$  è nilpotente. Per il viceversa utilizziamo il Lemma 4.8.12 (decomposizione di Fitting): sia  $s \in \mathbb{N}$  per il quale

$$V = \ker T^s \oplus \text{Im } T^s$$

e  $T|_{\ker T^s}$  abbia solo l'autovalore nullo (a meno che  $\ker T^s = \{0\}$ ), mentre  $T|_{\text{Im } T^s}$  non presenti l'autovalore nullo. Se  $T$  ha solo l'autovalore nullo, allora deve necessariamente essere  $\text{Im } T^s = \{0\}$ , da cui  $V = \ker T^s$ , cioè  $T^s = 0$ .  $\square$

Nel caso generale il calcolo dell'esponenziale di una data matrice può essere ricondotto al calcolo di un'esponenziale che rientri in uno dei casi precedenti mediante il passaggio a un'opportuna matrice simile, utilizzando poi la relazione (4.16) (o meglio, ai fini della risoluzione del sistema differenziale, la (4.17)).

### 4.5.1 Matrice diagonalizzabile

La situazione più semplice è quella in cui la matrice  $A$  è diagonalizzabile (in  $\mathbb{C}$ ). In tal caso (si veda la Proposizione 4.8.10 e l'Osservazione 4.8.11 in Appendice), esiste una base di  $\mathbb{C}^n$  formata da autovettori e la matrice  $P$  che ha nelle colonne gli elementi di tale base diagonalizza  $A$ , cioè  $P^{-1}AP$  è diagonale.

Vediamo un esempio.

ESEMPIO.

$$x'(t) = Ax(t), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 6 \\ -3 & 4 & -6 \\ -3 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(\lambda + 2)^2.$$

Gli autovalori sono pertanto  $\lambda_1 = 1$ , semplice, e  $\lambda_2 = -2$ , di molteplicità algebrica 2. Determiniamo gli autospazi corrispondenti; si ha

$$\begin{aligned} E(\lambda_1) &= \langle v_1 \rangle, & v_1 &= (-1, 1, 1) \\ E(\lambda_2) &= \langle \{v_2, v_3\} \rangle, & v_2 &= (2, 1, 0), \quad v_3 = (-2, 0, 1). \end{aligned}$$

Allora (vedi Proposizione 4.8.10)  $T: x \mapsto Ax$  è diagonalizzabile, e nella base

$$\tilde{\mathcal{B}} = (v_1, v_2, v_3)$$

la matrice associata è diagonale:

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{con } P = (v_1 | v_2 | v_3) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(notiamo come non sia necessario il calcolo del prodotto  $P^{-1}AP$ ; si veda l'Osservazione 4.8.11). Posto

$$x(t) = P\tilde{x}(t),$$

risulta  $\tilde{x}' = \tilde{A}\tilde{x}$ , quindi

$$\tilde{x}(t) = e^{t\tilde{A}}C, \quad C \in \mathbb{C}^3.$$

Infine

$$x(t) = P\tilde{x}(t) = (v_1 | v_2 | v_3) \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

cioè

$$x(t) = c_1 e^t v_1 + c_2 e^{-2t} v_2 + c_3 e^{-2t} v_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}.$$

L'esempio ora esposto rientra nel seguente schema:

- Se la matrice  $A$  è diagonalizzabile (in  $\mathbb{C}$ ), detta  $\tilde{\mathcal{B}} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  una base di  $\mathbb{C}^n$  formata da autovettori e  $P = (v_1 | v_2 | \dots | v_n)$  la matrice che ha nelle colonne gli elementi di  $\tilde{\mathcal{B}}$  (matrice che permette di passare dalla base canonica alla base  $\tilde{\mathcal{B}}$ ), si ha:

$$x(t) = P\tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(t) = e^{t\tilde{A}}C, \quad \text{con } \tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{C}^n.$$

Quindi:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n, \quad c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}.$$

Notiamo come questo risultato possa essere verificato direttamente *a posteriori* osservando che ogni funzione  $e^{\lambda_k t} v_k$  è soluzione del sistema  $x' = Ax$  poiché  $v_k$  è un autovettore di  $A$ , e inoltre si tratta di soluzioni linearmente indipendenti in quanto la loro matrice wronskiana per  $t = 0$  non è altro che la matrice  $P = (v_1 | v_2 | \dots | v_n)$ .

**OSSERVAZIONE 4.5.2** Se la matrice  $A$  è a elementi reali e gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sono reali, allora è possibile individuare una base *reale*  $v_1, v_2, \dots, v_n$  di autovettori di  $A$ : le  $n$  funzioni  $e^{\lambda_k t} v_k$  formano una base dello spazio vettoriale (su  $\mathbb{C}$ ) delle soluzioni dell'equazione omogenea  $x' = Ax$  e le loro combinazioni lineari a coefficienti reali danno tutte e solo le soluzioni *reali* dell'equazione stessa (trattasi, infatti, di uno spazio di dimensione  $n$  su  $\mathbb{R}$ ).

Se la matrice  $A$  è a elementi reali, ma non tutti gli autovalori sono reali, è comunque possibile determinare una base reale dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea  $x' = Ax$  (vedi § 4.5.3).

### 4.5.2 Caso generale

Prima di affrontare la situazione generale consideriamo il caso in cui

$A \in M^{n \times n}(\mathbb{C})$  presenta il solo autovalore  $\lambda$ , con molteplicità algebrica  $n$ .

La Proposizione 4.5.1 suggerisce la seguente decomposizione della matrice  $A$ :

$$A = \lambda I + (A - \lambda I). \quad (4.21)$$

Infatti  $\lambda I$  è una matrice diagonale, mentre, in base alla Proposizione 4.5.1,  $A - \lambda I$  risulta nilpotente in quanto dotata del solo autovalore nullo. Inoltre, poiché i due addendi commutano fra loro, otteniamo:

$$e^{tA} = e^{\lambda t} e^{t(A - \lambda I)}.$$

Nel caso generale, indichiamo con

$\lambda_1, \dots, \lambda_q$  gli autovalori distinti di  $A$   
con molteplicità  $m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_q)$ , rispettivamente.

Il calcolo della matrice esponenziale sarebbe risolto nell'ipotesi di riuscire a decomporre  $\mathbb{C}^n$  in somma diretta  $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_q$  mediante sottospazi  $T$ -invarianti (dove  $T$  è l'operatore lineare su  $\mathbb{C}^n$  cui è associata la matrice  $A$  nella base canonica) in modo che  $T|_{V_k}$  presenti un solo autovalore  $\lambda_k$  (*separazione degli autovalori*):

$$\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_q, \quad T(V_k) \subseteq V_k$$

$$T|_{V_k} \text{ presenta solo l'autovalore } \lambda_k.$$

Infatti:

- rispetto a una base di  $\mathbb{C}^n$  costruita come unione di basi dei singoli sottospazi  $V_k$  la matrice associata a  $T$  è diagonale a blocchi (vedi Proposizione 4.8.3); ogni blocco fornisce la matrice associata a  $T$  sul corrispondente sottospazio;
- per ogni  $k$  è possibile applicare a  $T|_{V_k}$  la decomposizione corrispondente alla (4.21).

Notiamo che, in base alla Proposizione 4.5.1, se tale decomposizione esiste deve necessariamente valere l'uguaglianza  $V_k = \ker(T|_{V_k} - \lambda_k I)^s$  per un qualche  $s \leq \dim V_k$ .

Si dimostra che una decomposizione con le proprietà dette esiste: si tratta della decomposizione in *autospazi generalizzati* (vedi Proposizione 4.8.14 e Teorema 4.8.15 nell'Appendice a questo capitolo). Lo schema è quindi il seguente:

- Detti  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  gli autovalori distinti, si indichi con  $\tilde{\mathcal{B}}_k$  una base dell'autospazio generalizzato  $E'(\lambda_k)$  (per  $k = 1, \dots, q$ ), la cui dimensione è pari alla molteplicità  $m(\lambda_k)$ . Allora

nella base  $\tilde{\mathcal{B}} = \tilde{\mathcal{B}}_1 \cup \dots \cup \tilde{\mathcal{B}}_q$  la matrice associata all'operatore  $T$  è data da (vedi (4.56) in Appendice):

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & & & & \\ & \tilde{A}_2 & & & \\ & & \tilde{A}_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \tilde{A}_q \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

dove  $P$  è la matrice le cui colonne sono formate, ordinatamente, dagli elementi della base  $\tilde{\mathcal{B}}$ ; la matrice  $\tilde{A}_k$  risulta essere la matrice associata a  $T|_{E'(\lambda_k)}$  nella base  $\tilde{\mathcal{B}}_k$ .

- *La decomposizione*

$$\tilde{A}_k = \lambda_k I + N_k, \quad \text{dove } N_k = \tilde{A}_k - \lambda_k I,$$

esprime  $\tilde{A}_k$  come somma di una matrice diagonale e una nilpotente ( $N_k$  è la matrice associata a  $(T - \lambda_k I)|_{E'(\lambda_k)}$  nella base  $\tilde{\mathcal{B}}_k$ ). Pertanto risulta:

$$e^{t\tilde{A}_k} = e^{\lambda_k t} \left[ I + tN_k + \frac{1}{2}(tN_k)^2 + \dots + \frac{1}{(s-1)!}(tN_k)^{s-1} \right]. \quad (4.23)$$

dove  $s \leq m(\lambda_k)$  è tale che  $N_k^s = 0$ .

La matrice  $P$  permette poi di passare alla soluzione  $x(t)$  (vedi la (4.17)).

Anche in questo contesto vale un'osservazione analoga alla 4.5.2: se la matrice  $A$  è a coefficienti reali e gli autovalori sono reali, allora esiste una base *reale* per ogni sottospazio generalizzato, quindi una base *reale* per le soluzioni del sistema  $x' = Ax$ . Al § 4.5.3 illustreremo come ricavare una base reale nel caso in cui la matrice sia a coefficienti reali, ma non abbia tutti gli autovalori reali.

Vediamo un esempio.

ESEMPIO (I parte) Risolvere il seguente sistema lineare:

$$x'(t) = Ax(t), \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda + 1)^2(\lambda + 2).$$

Gli autovalori sono pertanto  $\lambda_1 = -2$ , semplice, e  $\lambda_2 = -1$ , di molteplicità algebrica 2. Consideriamo gli autospazi corrispondenti; si ha

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

e il sistema  $(A - \lambda_1 I)x = 0$  dà:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3. \end{cases}$$

Pertanto:

$$E(\lambda_1) = \langle v_1 \rangle, \quad \text{con } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Passiamo a  $\lambda_2$ :

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

quindi il rango di  $A - \lambda_2 I$  è 2 e  $\dim E(\lambda_2) = 3 - 2 = 1 < m(\lambda_2)$ . Allora (vedi Proposizione 4.8.10)  $T: x \mapsto Ax$  non è diagonalizzabile. Utilizziamo allora la decomposizione di  $\mathbb{C}^3$  mediante gli autospazi generalizzati (Teorema 4.8.15):

$$\mathbb{C}^3 = E'(\lambda_1) \oplus E'(\lambda_2).$$

Risulta  $E'(\lambda_1) = E(\lambda_1)$  poiché  $\dim E(\lambda_1) = m(\lambda_1)$  (molteplicità algebrica). Determiniamo l'autospazio generalizzato  $E'(\lambda_2)$ . Risulta:

$$(A - \lambda_2 I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

Allora il rango di  $(A - \lambda_2 I)^2$  è 1, e quindi  $\dim \ker(A - \lambda_2 I)^2 = 2$ ; se ricordiamo che  $\dim E'(\lambda_2) = m(\lambda_2) = 2$ , concludiamo che

$$E'(\lambda_2) = \ker(A - \lambda_2 I)^2.$$

(del resto (vedi Proposizione 4.8.14)  $E'(\lambda_2) = \ker(A - \lambda_2 I)^s$  per un opportuno  $s \leq \dim E'(\lambda_2) = 2$ , per cui deve essere  $s = 2$ ). Il sistema  $(A - \lambda_2 I)^2 x = 0$  si riduce all'equazione

$$2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0,$$

per cui

$$E'(\lambda_2) = \langle v_2, v_3 \rangle, \quad \text{con } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Posto  $P = (v_1 \mid v_2 \mid v_3)$  si ottiene:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{A} = P^{-1}AP = \left( \begin{array}{c|cc} -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

(anziché mediante calcolo diretto la matrice  $\tilde{A}$  può essere ottenuta esprimendo le immagini dei vettori di base  $v_1, v_2, v_3$  come combinazione lineare della base stessa).<sup>18</sup> Come ci si aspettava (vedi (4.22)), la matrice  $\tilde{A}$  è diagonale a blocchi. La matrice

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

<sup>18</sup>Chiaramente risulta  $Av_1 = -2v_1$ ; inoltre:

$$Av_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -2v_2 - v_3; \quad Av_3 = v_2.$$

Pertanto le colonne di  $\tilde{A}$  sono  $(-2, 0, 0)^T, (0, -2, -1)^T$  e  $(0, 1, 0)^T$ .

è la matrice associata a  $T|_{E'(\lambda_2)}$  nella base  $(v_2, v_3)$ . Decomponiamo  $\tilde{A}_2$  come:

$$\tilde{A}_2 = \lambda_2 I + (\tilde{A}_2 - \lambda_2 I) = -I + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =: -I + N.$$

La matrice  $N$  è nilpotente: come subito si verifica  $N^2 = 0$ . Allora:

$$e^{t\tilde{A}_2} = e^{-tI} e^{tN} = e^{-tI}(I + tN) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$e^{t\tilde{A}} = \left( \begin{array}{c|c} e^{-2t} & \\ \hline & e^{t\tilde{A}_2} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} e^{-2t} & \\ \hline & e^{-t} \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

Infine  $x(t) = P\tilde{x}(t)C$  al variare di  $C = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ , cioè:

$$\begin{aligned} x(t) &= (e^{-2t}v_1 \mid e^{-t}[(1-t)v_2 - tv_3] \mid e^{-t}[tv_2 + (1+t)v_3]) C \\ &= c_1 e^{-2t}v_1 + c_2 e^{-t}[v_2 - (v_2 + v_3)t] + c_3 e^{-t}[v_3 + (v_2 + v_3)t]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Come si vede (coerentemente con quanto indicato nel successivo Teorema 4.5.4, si tratta delle combinazioni lineari di soluzioni della forma  $e^{\lambda t}p(t)$  con  $\lambda$  autovalore di  $A$  e  $p(t)$  polinomio a coefficienti in  $\mathbb{R}^3$ .

ESEMPIO (II parte) Il calcolo della matrice  $\tilde{A}_2$  associata all'operatore  $T$  sullo spazio  $E'(\lambda_2)$  può essere semplificato scegliendo opportunamente una base di  $E'(\lambda_2)$ .

Sia  $w_1$  un autovettore relativo all'autovalore  $\lambda_2 = -1$ : poiché  $\ker(T - \lambda_2 I) = \{(t(1, 0, 1) : t \in \mathbb{R})\}$ , assumiamo

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo ora una controimmagine di  $w_1$  tramite  $T - \lambda_2 I$ : chiaramente, se un tale  $w_2$  esiste, deve appartenere a  $\ker(T - \lambda_2 I)^2 = E'(\lambda_2)$ . Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

si ottiene  $x = \{(t-1, -2, t) : t \in \mathbb{R}\}$ . Sia

$$w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

È facile vedere che, rispetto alla base  $(w_1, w_2)$ , la matrice associata all'operatore  $(T - \lambda_2 I)|_{E'(\lambda_2)}$  diventa

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

infatti  $w_1$  e  $w_2$  hanno componenti  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ , rispettivamente, e le componenti in  $(w_1, w_2)$  delle loro immagini, cioè le colonne di  $\tilde{A}_2$ , devono essere  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ , rispettivamente (poiché  $(T - \lambda_2 I)w_1 = 0$  e  $(T - \lambda_2 I)w_2 = w_1$ ). Pertanto

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



Il calcolo dell'esponenziale di  $\tilde{A}_2 = \lambda_2 I + N$  è quindi particolarmente semplice ( $N^2 = 0$ ):

$$e^{t\tilde{A}_2} = e^{\lambda_2 t} e^{tN} = e^{-t}(I + tN) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posto  $P = (v_1 \mid w_1 \mid w_2)$  e  $x = P\tilde{x}$ , risulta:

$$\tilde{x}(t) = \left( \begin{array}{c|c} e^{-2t} & \\ \hline & e^{t\tilde{A}_2} \end{array} \right) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} e^{-2t} & \\ \hline & e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

da cui:

$$\begin{aligned} x(t) &= (e^{-2t}v_1 \mid e^{-t}w_1 \mid e^{-t}(tw_1 + w_2)) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= c_1 e^{-2t}v_1 + c_2 e^{-t}w_1 + c_3 e^{-t}(tw_1 + w_2). \end{aligned}$$

È facile vedere che si tratta della stessa famiglia di funzioni data dalla (4.24). Infatti quest'ultima può essere riscritta utilizzando, anziché le funzioni

$$u_1 = e^{-2t}v_1, \quad u_2 = e^{-t}[v_2 - (v_2 + v_3)t], \quad u_3 = e^{-t}[v_3 + (v_2 + v_3)t],$$

le seguenti:

$$u_1, \quad u_2, \quad u_2 + u_3.$$

Se teniamo conto che

$$v_2 = -w_2, \quad v_3 = w_1 + w_2,$$

risulta

$$u_2 = (-w_1 t - w_2)e^{-t}, \quad u_2 + u_3 = w_1 e^{-t},$$

da cui l'asserita uguaglianza delle due famiglie di funzioni.

**OSSERVAZIONE 4.5.3** Il procedimento seguito nella seconda parte dell'esempio precedente per costruire una base dell'autospazio generalizzato ha portato a una matrice, relativamente a quell'autospazio, della forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N, \quad \text{con } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La struttura di  $N$  è quella del blocco nilpotente elementare introdotto nella (4.19). In generale, il procedimento descritto porta ad una matrice associata a  $T$  per la quale, in corrispondenza a ogni autospazio generalizzato  $E'(\lambda)$ , troviamo uno o più blocchi della forma

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N, \quad (4.25)$$

con  $N$  come in (4.19). Si tratta della cosiddetta *forma canonica di Jordan* della matrice (si veda l'Appendice a questo capitolo, in particolare l'Osservazione 4.8.19).

Sfruttiamo ora i risultati ottenuti per dare un utile risultato di struttura per le soluzioni. Dalla (4.23) scende subito che le colonne della matrice  $e^{t\tilde{A}}$  sono della forma

$$e^{\lambda t} \sum_{j=1}^r t^j P w_j = e^{\lambda t} p(t),$$

con  $p(t)$  polinomio a coefficienti in  $\mathbb{C}^n$  di grado al più  $m(\lambda) - 1$ . Concludiamo pertanto con il seguente teorema:

**TEOREMA 4.5.4** *Le soluzioni dell'equazione  $x' = Ax$  sono tutte e sole le combinazioni lineari di  $n$  opportune soluzioni della forma*

$$e^{\lambda t} p(t), \tag{4.26}$$

dove  $\lambda$  è autovalore (in  $\mathbb{C}$ ) di  $A$  e  $p(t)$  è un polinomio in  $t$  a coefficienti in  $\mathbb{C}^n$  di grado al più  $m(\lambda) - 1$  (con  $m(\lambda)$  molteplicità algebrica di  $\lambda$ ).

Ne risulta confermato, in particolare, che le soluzioni sono di classe  $C^\infty$ .

Quanto asserito nel Teorema 4.5.4 risulta particolarmente evidente utilizzando la forma (4.57) di Jordan della matrice. Consideriamo il semplice caso in cui vi sia un solo blocco, relativo all'autovalore  $\lambda$ , come nella (4.25). Utilizzando la decomposizione in parte diagonale e parte nilpotente abbiamo:

$$e^{t\tilde{A}} = e^{\lambda t} \left[ I + tN + \frac{1}{2}(tN)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}(tN)^{n-1} \right].$$

Se  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  è la base rispetto a cui  $T(x) = Ax$  ha  $\tilde{A}$  come matrice associata, allora le soluzioni dell'equazione  $x' = Ax$  hanno la forma:

$$\begin{aligned} x(t) = & c_1 e^{\lambda t} v_1 + \\ & + c_2 e^{\lambda t} (v_1 t + v_2) + \\ & + c_3 e^{\lambda t} \left( \frac{1}{2} t^2 v_1 + t v_2 + v_3 \right) + \\ & \dots \\ & + c_{n-1} e^{\lambda t} \left( \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} v_1 + \dots + t v_{n-1} + v_n \right), \end{aligned} \tag{4.27}$$

al variare di  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ .

### 4.5.3 Soluzioni reali

Nel caso in cui la matrice  $A$  del sistema, a elementi reali, abbia tutti gli autovalori reali, il procedimento sopra illustrato può essere svolto in campo reale ottenendo una *base reale* per lo spazio delle soluzioni. Supponiamo, invece, che gli autovalori non siano necessariamente tutti reali:

$$\begin{aligned} \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r & \in \mathbb{R} \\ \mu_1, \dots, \mu_l, \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_l & \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \end{aligned}$$

(se  $l = 0$  o  $r = 0$  intenderemo che gli autovalori sono tutti in  $\mathbb{R}$  o in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , rispettivamente). La forma matriciale (4.22) può essere ottenuta in campo complesso utilizzando per ciascun autospazio  $E'(\lambda_k)$  una base in generale complessa. Per ogni coppia  $\mu, \bar{\mu}$  di autovalori non reali possiamo considerare basi di  $E'(\mu)$  e  $E'(\bar{\mu})$  fra loro coniugate e, in corrispondenza di queste, soluzioni linearmente indipendenti della forma (4.26) a coppie coniugate:

$$u(t) = e^{\mu t} p(t), \quad \bar{u}(t) = e^{\bar{\mu} t} \bar{p}(t),$$

con  $p(t)$  polinomio a coefficienti in  $\mathbb{C}^n$  di grado al più  $m(\mu) - 1$ . Osserviamo che anche le funzioni:

$$\operatorname{Re} u(t) = \frac{1}{2}[u(t) + \bar{u}(t)], \quad \operatorname{Im} u(t) = \frac{1}{2i}[u(t) - \bar{u}(t)], \quad (4.28)$$

sono soluzioni di  $x' = Ax$ ; viene inoltre mantenuta l'indipendenza lineare, per cui otteniamo una *base reale* per lo spazio delle soluzioni.

Posto  $r(t) = \operatorname{Re} p(t)$  e  $s(t) = \operatorname{Im} p(t)$ , cioè  $p(t) = r(t) + is(t)$ , risulta:

$$\operatorname{Re} u(t) = (r(t) \cos \beta t - s(t) \sin \beta t)e^{\alpha t}, \quad \operatorname{Im} u(t) = (r(t) \sin \beta t + s(t) \cos \beta t)e^{\alpha t}.$$

Si ottiene quindi il seguente risultato (si noti che per  $\beta = 0$  si recuperano gli elementi della base corrispondenti agli autovalori reali):

**TEOREMA 4.5.5** *Le soluzioni dell'equazione  $x' = Ax$  sono combinazioni lineari di funzioni della forma*

$$e^{\alpha t} p(t) \cos \beta t, \quad e^{\alpha t} q(t) \sin \beta t,$$

dove  $\mu = \alpha + i\beta$  varia fra gli autovalori di  $A$  e  $p(t), q(t)$  sono polinomi in  $t$  a coefficienti in  $\mathbb{R}^n$  di grado al più  $m(\mu) - 1$  (con  $m(\mu)$  molteplicità algebrica di  $\mu$ ).

Alternativamente, rispetto alla considerazione delle parti reale e immaginaria di cui alla (4.28), è possibile utilizzare direttamente una *base reale* di  $E'(\mu) \oplus E'(\bar{\mu})$  considerando parte reale e parte immaginaria degli elementi di una base di  $E'(\mu)$ .

Vediamo dapprima il tutto nel caso generale bidimensionale.

Sia  $A \in M^{2 \times 2}(\mathbb{R})$  con autovalori

$$\mu = \alpha + i\beta, \quad \bar{\mu} = \alpha - i\beta \quad (\beta \neq 0).$$

Sia  $w$  un autovettore relativo a  $\mu$  (e quindi  $\bar{w}$  autovettore relativo a  $\bar{\mu}$ ). Nella base  $(w, \bar{w})$  di  $\mathbb{C}^2 (= E(\mu) \oplus E(\bar{\mu}))$  la matrice associata a  $T: x \mapsto Ax$  è diagonale:

$$S = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Pertanto si ottengono le seguenti soluzioni fra loro coniugate (sono le colonne della matrice  $Pe^{tS}$ , dove  $P = (w \mid \bar{w})$ ):

$$u(t) = we^{\mu t}, \quad \bar{u}(t) = \bar{w}e^{\bar{\mu} t}.$$

Posto  $z = \operatorname{Re} w$  e  $\zeta = \operatorname{Im} w$ , si ha:

$$u(t) = e^{\alpha t} [(\cos \beta t)z - (\sin \beta t)\zeta + i((\sin \beta t)z + (\cos \beta t)\zeta)];$$

quindi:

$$\operatorname{Re} u(t) = e^{\alpha t} [(\cos \beta t)z - (\sin \beta t)\zeta],$$

$$\operatorname{Im} u(t) = e^{\alpha t} [(\sin \beta t)z + (\cos \beta t)\zeta].$$

Le loro combinazioni lineari danno le soluzioni di  $x' = Ax$ .

Alternativamente, possiamo procedere utilizzando la *base reale*  $(z, \zeta)$  per  $\mathbb{C}^2$ . Poiché

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2}(w + \bar{w}) \\ \zeta = \frac{1}{2i}(w - \bar{w}) \end{cases}$$



Sappiamo che le matrici  $\tilde{A}_\mu - \mu I$  e  $\tilde{A}_{\bar{\mu}} - \bar{\mu} I$  sono nilpotenti. Allora tale è anche la matrice

$$N = \tilde{A} - S_\mu, \quad \text{con } S_\mu = \begin{pmatrix} \mu I & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\mu} I \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Pertanto, la decomposizione  $\tilde{A} = S + N$  esprime  $\tilde{A}$  come somma di una parte diagonale e una nilpotente.

Indichiamo ora con  $\tilde{A}_{E'(\mu) \oplus E'(\bar{\mu})}^{\mathbb{R}}$  la matrice associata a  $T \Big|_{E'(\mu) \oplus E'(\bar{\mu})}$  rispetto alla base reale

$$\text{Re } w_1, \text{Im } w_1, \dots, \text{Re } w_m, \text{Im } w_m. \quad (4.33)$$

Come nel caso bidimensionale studiato poco sopra (si veda il passaggio dalla (4.29) alla (4.30)), non è difficile rendersi conto che in tale base la parte diagonale  $S$  della decomposizione (4.32) diventa:

$$D_\mu = \begin{pmatrix} B_\mu & & & \\ & B_\mu & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_\mu \end{pmatrix}, \quad \text{con } B_\mu = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (\mu = \alpha + i\beta),$$

cioè la matrice quadrata di ordine  $2m$  che ha sulla diagonale il blocco  $B_\mu$  ripetuto  $m$  volte. Pertanto:

$$\tilde{A}_{E'(\mu) \oplus E'(\bar{\mu})}^{\mathbb{R}} = D_\mu + (\tilde{A}_{E'(\mu) \oplus E'(\bar{\mu})}^{\mathbb{R}} - D_\mu) \quad (4.34)$$

decompone  $\tilde{A}_{E'(\mu) \oplus E'(\bar{\mu})}^{\mathbb{R}}$  nella somma di una matrice diagonale a blocchi, di cui è immediato il calcolo dell'esponenziale (si ricordi la (4.31)), e una matrice nilpotente.

OSSERVAZIONE 4.5.6 Parallelemente a quanto accennato nell'Osservazione 4.5.3, scegliendo opportunamente la base  $(w_1, w_2, \dots, w_m)$  di ciascun  $E(\mu)$ , la matrice associata dà la cosiddetta *forma canonica reale* della matrice  $A$  (rimandiamo ulteriori dettagli all'Appendice di questo capitolo).

ESEMPIO.

$$x'(t) = Ax(t), \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -10 & -3 \\ 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 15 & 15 & -30 & -8 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \mu = -2 + 3i, \quad \bar{\mu} = -2 - 3i.$$

Allora  $A$  è semisemplice (cioè diagonalizzabile in  $\mathbb{C}$ ). Una base di autovettori di  $\mathbb{C}^4$ , relativi a  $\lambda_1, \lambda_2, \mu, \bar{\mu}$ , rispettivamente, è:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, -1, 0, 0) \\ v_2 &= (0, 2, 1, 0) \\ w &= (1, 0, 0, 2 - i) \\ \bar{w} &= (1, 0, 0, 2 + i). \end{aligned}$$

Rispetto a questa base sappiamo che la matrice associata è:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 + 3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 - 3i \end{pmatrix}.$$

Si ottengono allora le quattro soluzioni linearmente indipendenti (si tratta delle colonne della matrice  $Pe^{t\tilde{A}}$ , dove  $P = (v_1 \mid v_2 \mid w \mid \bar{w})$ ):

$$v_1 e^{-t}, v_2 e^{2t}, w e^{(-2+3i)t}, \bar{w} e^{(-2-3i)t}.$$

Sostituiamo le ultime due con le funzioni:

$$\operatorname{Re}(w e^{(-2+3i)t}) = \begin{pmatrix} \cos 3t \\ 0 \\ 0 \\ 2 \cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix} e^{-2t}, \quad \operatorname{Im}(w e^{(-2+3i)t}) = \begin{pmatrix} \sin 3t \\ 0 \\ 0 \\ -\cos 3t + 2 \sin 3t \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

Allora:

$$x(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + [c_3 \cos 3t + c_4 \sin 3t] e^{-2t} \\ -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} \\ c_2 e^{2t} \\ [c_3(2 \cos 3t + \sin 3t) + c_4(2 \sin 3t - \cos 3t)] e^{-2t} \end{pmatrix}$$

al variare di  $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ .

In modo equivalente è possibile ottenere le soluzioni passando tramite la matrice associata a  $T$  nella base reale ottenuta considerando le parti reale e immaginaria di  $w$  (infatti  $(\operatorname{Re} w, \operatorname{Im} w)$  è una base reale di  $E(\mu) \oplus E(\bar{\mu})$ ); posto quindi

$$P = (v_1 \mid v_2 \mid \operatorname{Re} w \mid \operatorname{Im} w),$$

svolgendo i calcoli si ha:

$$\tilde{A} = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Del resto, la matrice  $\tilde{A}$  è ottenibile anche senza eseguire esplicitamente il prodotto  $P^{-1} A P$ , in quanto il blocco relativo a  $T|_{E'(\mu) \oplus E'(\bar{\mu})}$  ricade nel caso bidimensionale di cui alla matrice (4.30). Allora, tenendo conto della (4.31),

$$e^{t\tilde{A}} = \begin{pmatrix} e^{-t} & & & \\ & e^{2t} & & \\ & & e^{-2t} & (\cos 3t \quad \sin 3t) \\ & & & (-\sin 3t \quad \cos 3t) \end{pmatrix}.$$

Infine:

$$\begin{aligned} x(t) &= P e^{t\tilde{A}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \\ &= c_1 e^{-t} v_1 + c_2 e^{2t} v_2 + c_3 e^{-2t} [(\cos 3t) \operatorname{Re} w - (\sin 3t) \operatorname{Im} w] \\ &\quad + c_4 e^{-2t} [(\sin 3t) \operatorname{Re} w + (\cos 3t) \operatorname{Im} w], \end{aligned}$$

che coincide con l'espressione precedentemente trovata per le soluzioni.

ESEMPIO.

$$x'(t) = Ax(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 10 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di  $A$  sono  $\pm i$  con molteplicità algebrica 2. Come si verifica facilmente, il rango di  $A - iI$  è 3, per cui l'autospazio relativo a  $i$  (e quindi anche quello relativo a  $-i$ ) ha dimensione 1: la matrice non è diagonalizzabile in  $\mathbb{C}$ . Calcoliamo gli autospazi generalizzati; risulta:

$$(A - iI)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 - 2i & 8 - 2i & 2 \\ 4i & -2 - 6i & 8 - 20i & 4 - 4i \\ -2i & 2i & -6 + 4i & -2 \\ 4i & -2i & 8 & 2 + 2i \end{pmatrix}$$

e  $E'(i) = \ker(A - iI)^2$  (infatti, per la Proposizione 4.8.14,  $E'(i) = \ker(A - iI)^s$  per un opportuno  $s \leq \dim E'(i) = 2$ , per cui deve essere  $s = 2$ ). Le soluzioni del sistema  $(A - iI)^2 x = 0$  sono date da:

$$\begin{cases} x_1 = (-2 + i)s - t \\ x_2 = -(4 + 2i)s - (1 + i)t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{C}.$$

Allora una base di  $E'(i)$  è:

$$w_1 = (-2 + i, -4 - 2i, 1, 0), \quad w_2 = (-1, -1 - i, 0, 1),$$

mentre  $\bar{w}_1, \bar{w}_2$  formano una base per  $E'(-i)$ . Determiniamo la matrice associata valutando l'immagine dei vettori di base; risulta:

$$Aw_1 = (-3 - 2i, 2 - 8i, 3i, -4i) = 3iw_1 - 4iw_2$$

$$Aw_2 = (-1 - i, 1 - 3i, i, -i) = iw_1 - iw_2.$$

Allora

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{cc|cc} 3i & i & & \\ -4i & -i & & \\ \hline & & -3i & -i \\ & & 4i & i \end{array} \right).$$

Posto

$$B = \begin{pmatrix} 3i & i \\ -4i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i & i \\ -4i & -2i \end{pmatrix}$$

il secondo addendo risulta nilpotente (a quadrato nullo), per cui:

$$e^{tB} = e^{it} \begin{pmatrix} 1 + 2it & it \\ -4it & 1 - 2it \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$e^{t\tilde{A}} = e^{it} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 + 2it & it & & \\ -4it & 1 - 2it & & \\ \hline & & 1 - 2it & -it \\ & & 4it & 1 + 2it \end{array} \right).$$

Ne risultano le quattro soluzioni linearmente indipendenti

$$e^{it}p(t), \quad e^{it}q(t), \quad e^{-it}\bar{p}(t), \quad e^{-it}\bar{q}(t),$$

dove:

$$\begin{aligned} p(t) &= (1 + 2it)w_1 - 4itw_2 = w_1 + 2i(w_1 - 2w_2)t \\ &= (-2 + i - 2t, -4 - 2i - 4it, 1 + 2it, -4it), \\ q(t) &= itw_1 + (1 - 2it)w_2 = w_2 + i(w_1 - 2w_2)t \\ &= (-1 - t, -1 - i - 2it, it, 1 - 2it). \end{aligned}$$

Come indicato in (4.28), passando alle parti reali e immaginarie delle soluzioni così trovate possiamo ottenere una base *reale*:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \begin{pmatrix} -2(1+t)\cos t - \sin t \\ -4\cos t + 2(1+2t)\sin t \\ \cos t - 2t\sin t \\ 4t\sin t \end{pmatrix}, & u_2(t) &= \begin{pmatrix} \cos t - 2(1+t)\sin t \\ -2(1+2t)\cos t - 4\sin t \\ 2t\cos t + \sin t \\ -4t\cos t \end{pmatrix}, \\ u_3(t) &= \begin{pmatrix} -(1+t)\cos t \\ -\cos t + (1+2t)\sin t \\ -t\sin t \\ \cos t + 2t\sin t \end{pmatrix}, & u_4(t) &= \begin{pmatrix} -(1+t)\sin t \\ -\sin t - (1+2t)\cos t \\ t\cos t \\ -2t\cos t + \sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Come nell'esempio precedente calcoliamo le soluzioni anche passando tramite la matrice associata a  $T$  nella base reale ottenuta da una base di  $E'(i)$  prendendone le parti reale e immaginaria.

Consideriamo i vettori  $w_1, w_2$  sopra determinati e, come base di  $E'(i) \oplus E'(-i)$ ,

$$\operatorname{Re} w_1, \operatorname{Im} w_1, \operatorname{Re} w_2, \operatorname{Im} w_2.$$

Sia

$$P = (\operatorname{Re} w_1 \mid \operatorname{Im} w_1 \mid \operatorname{Re} w_2 \mid \operatorname{Im} w_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice associata a  $T$  è

$$\tilde{A}_{E'(i) \oplus E'(-i)}^{\mathbb{R}} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posto

$$D = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{array} \right),$$

sappiamo che la matrice  $\tilde{A}_{E'(i) \oplus E'(-i)}^{\mathbb{R}} - D$  è nilpotente (vedi la (4.34)):

$$M := \tilde{A}_{E'(i) \oplus E'(-i)}^{\mathbb{R}} - D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

risulta  $M^2 = 0$ . Inoltre (vedi la (4.31))

$$e^{t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$



Quindi:

$$\begin{aligned} \exp \left[ t \tilde{A}_{E'(i) \oplus E'(-i)}^{\mathbb{R}} \right] &= e^{tD} (I + tM) \\ &= \left( \begin{array}{cc|cc} \cos t & \sin t & & \\ -\sin t & \cos t & & \\ \hline & & \cos t & \sin t \\ & & -\sin t & \cos t \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 & t \\ -2t & 1 & -t & 0 \\ 0 & -4t & 1 & -2t \\ 4t & 0 & 2t & 1 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

Infine, una base dello spazio delle soluzioni è data dalle colonne della matrice  $P \exp \left[ t \tilde{A}_{E'(i) \oplus E'(-i)}^{\mathbb{R}} \right]$ : svolgendo i calcoli si ottengono le soluzioni  $u_1, u_2, u_3$  e  $u_4$  sopra menzionate.

#### 4.6 EQUAZIONI SCALARI LINEARI DI ORDINE SUPERIORE

Sia  $I$  un intervallo reale aperto e  $a_0, a_1, \dots, a_n$  e  $f$  funzioni continue in  $I$ . Sia  $L: C^n(I) \rightarrow C^0(I)$  l'operatore differenziale definito da:

$$\begin{aligned} (Ly)(t) &= \sum_{k=0}^n a_k(t) y^{(k)}(t) \\ &= a_n(t) y^{(n)}(t) + \dots + a_1(t) y'(t) + a_0(t) y(t). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Consideriamo l'equazione

$$Ly = f, \tag{4.36}$$

e l'equazione

$$Ly = 0. \tag{4.37}$$

L'equazione (4.37) è detta equazione *omogenea associata* alla (4.36); di conseguenza ci si riferisce a volte alla (4.36) come all'equazione *completa*.

Poiché  $L$  è lineare, sussiste il medesimo risultato di struttura enunciato nella Proposizione 3.2.1 per le equazioni lineari del primo ordine, cioè:

PROPOSIZIONE 4.6.1 *L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea (4.37) è un sottospazio vettoriale  $V$  di  $C^n(I)$  di dimensione  $n$ . L'insieme delle soluzioni dell'equazione (4.36) può essere rappresentato nella forma:*

$$\bar{y} + V,$$

dove  $\bar{y}$  è una qualunque soluzione dell'equazione (4.36) stessa.

Supporremo che il coefficiente  $a_n$  non si annulli mai in  $I$ , in modo che l'equazione sia effettivamente di ordine  $n$ . Come sappiamo, l'equazione (4.36) può essere trasformata in sistema equivalente ponendo:

$$x_0 = y, \quad x_1 = y', \quad x_2 = y'', \dots, x_{n-1} = y^{(n-1)}.$$

Si ottiene

$$\begin{cases} x'_0 = x_1 \\ x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \vdots \\ x'_{n-2} = x_{n-1} \\ x'_{n-1} = -\frac{1}{a_n} [a_{n-1}x_{n-1} + a_{n-2}x_{n-2} + \dots + a_1x_1 + a_0x_0] + \frac{f}{a_n} \end{cases} \tag{4.38}$$

cioè

$$x' = Ax + b$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & \dots & & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{f}{a_n} \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

Quindi  $y$  è soluzione di  $Ly = f$  se e solo se  $x = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$  è soluzione di  $x' = Ax + b$ .

Se  $y_1, \dots, y_n$  sono  $n$  soluzioni dell'equazione (4.37), la matrice delle corrispondenti soluzioni del sistema (4.38), per  $f \equiv 0$ , cioè

$$(y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}), \dots, (y_n, y_n', \dots, y_n^{(n-1)}),$$

è detta *matrice wronskiana*, e il suo determinante è detto *determinante wronskiano*, delle soluzioni  $y_1, y_2, \dots, y_n$ :

$$w(t) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Sappiamo che  $w(t)$  non si annulla mai in  $I$  o è ivi identicamente nullo. Il Teorema di Liouville assume ora la forma

$$w(t) = w(\tau) \exp\left(-\int_{\tau}^t \frac{a_{n-1}(s)}{a_n(s)} ds\right),$$

poiché  $\text{tr } A = -a_{n-1}(s)/a_n(s)$ .

PROPOSIZIONE 4.6.2 *Siano  $y_1, \dots, y_n$  elementi di  $V$  (cioè soluzioni di (4.37)) e sia  $t_0 \in I$ . Allora  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sono l.i. in  $V$  se e solo se  $w(t_0) \neq 0$ .*

*Dimostrazione.* Conviene dimostrare che

$$y_1, y_2, \dots, y_n \text{ sono l.d. (in } V) \text{ se e solo se } w(t_0) = 0.$$

Siano  $y_1, y_2, \dots, y_n$  l.d. (in  $V$ ): esistono  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  valori reali non tutti nulli per i quali

$$\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n \equiv 0 \quad \text{in } I.$$

Per derivazione si ottiene

$$\alpha_1 y_1^{(k)} + \dots + \alpha_n y_n^{(k)} \equiv 0 \quad \text{in } I.$$

Allora le funzioni

$$u_i = (y_i, y_i', \dots, y_i^{(n-1)}), \quad (i = 1, \dots, n),$$

che sono soluzioni di (4.38), sono l.d., per cui il loro determinante wronskiano, che è  $w(t)$ , è identicamente nullo.

Viceversa, se  $w(t_0) = 0$ , allora sono l.d. (in  $\mathbb{R}^n$ ) i vettori  $u_i(t_0)$  per  $i = 1, \dots, n$  (le  $u_i$  sono definite come sopra). Il Corollario 4.1.2 assicura allora che  $u_1, \dots, u_n$  sono l.d.; in particolare lo sono  $y_1, \dots, y_n$ .  $\square$

Parallelamente a quanto svolto per i sistemi del primo ordine, prima di passare alla determinazione di una  $n$ -upla di soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea (per la quale considereremo essenzialmente solo il caso dei coefficienti costanti), vediamo come si traduce il metodo di variazione delle costanti illustrato nel § 4.2 per i sistemi.

Siano  $y_1, \dots, y_n$  soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione (4.37). Sia  $X(t)$  la corrispondente matrice wronskiana, che è soluzione del sistema  $X' = A(t)X$ , con  $A$  come in (4.39). Sappiamo che la matrice risolvente del sistema  $x' = A(t)x$  è  $R(t, s) = X(t)X(s)^{-1}$  e che una soluzione particolare di  $x' = A(t)x + b(t)$  è data da

$$\bar{x}(t) = \int_{t_0}^t R(t, s)b(s) ds.$$

La prima componente  $\bar{y}$  di  $\bar{x}$  sarà soluzione dell'equazione (4.36).

Teniamo conto che  $b(s) = (f(s)/a_n(s))e_n$ , per cui

$$\bar{y}(t) = \int_{t_0}^t r(t, s)f(s) ds, \tag{4.40}$$

con

$$r(t, s) = \frac{1}{a_n(s)} e_1^T X(t)X(s)^{-1} e_n.$$

Indicata con  $(x_{ij}(\cdot))$  la matrice  $X(\cdot)$  e ricordando l'espressione della matrice inversa  $X(s)^{-1}$ , risulta:

$$r(t, s) = \frac{1}{a_n(s)} x_{1i}(t) \frac{1}{w(s)} \alpha_i(s),$$

dove  $\alpha_i(s)$  è il complemento algebrico dell'elemento  $x_{ni}(s)$  della matrice  $X(s)$ . Poiché  $x_{1i}(t) = y_i(t)$ , è immediato verificare che (si sviluppi secondo l'ultima riga):

$$r(t, s) = \frac{1}{w(s)a_n(s)} \begin{vmatrix} y_1(s) & \dots & y_n(s) \\ y_1'(s) & \dots & y_n'(s) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(s) & \dots & y_n^{(n-2)}(s) \\ y_1(t) & \dots & y_n(t) \end{vmatrix} \tag{4.41}$$

Riassumiamo quanto ottenuto:

**PROPOSIZIONE 4.6.3** *La funzione  $\bar{y}$  definita in (4.40), con  $r(t, s)$  dato dalla (4.41), è una soluzione particolare dell'equazione completa (4.36).*

La funzione  $r(t, s)$  è detta *nucleo risolvente* dell'equazione (4.36). Nel caso in cui l'equazione sia autonoma, ripercorrendo lo svolgimento precedente si ricava che  $r(t, s) = r(t - s, 0)$ .

## 4.7 EQUAZIONI A COEFFICIENTI COSTANTI

Consideriamo ora il caso in cui l'operatore differenziale  $L$  di cui alla (4.35) sia a coefficienti costanti:

$$(Ly)(t) = \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y, .$$

con  $a_k \in \mathbb{R}$ . Studiamo innanzitutto l'equazione omogenea associata.

*Equazione omogenea.*

Occupiamoci di determinare  $n$  soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea (4.37). Individuiamo gli autovalori della matrice  $A$  in (4.39). Consideriamo il determinante:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} - \lambda \end{vmatrix}$$

Sviluppando secondo l'ultima riga otteniamo:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (-1)^{n+1} \left(-\frac{a_0}{a_n}\right) + (-1)^{n+2} \left(-\frac{a_1}{a_n}\right)(-\lambda) + (-1)^{n+3} \left(-\frac{a_2}{a_n}\right)(-\lambda)^2 \\ &\quad + \dots + (-1)^{n+n-1} \left(-\frac{a_{n-2}}{a_n}\right)(-\lambda)^{n-2} \\ &\quad + (-1)^{n+n} \left(-\frac{a_{n-1}}{a_n} - \lambda\right)(-\lambda)^{n-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{a_n} [a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_{n-2}\lambda^{n-2} + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n]. \end{aligned}$$

L'equazione

$$P(\lambda) := a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

è detta *equazione caratteristica* dell'equazione (4.37); il polinomio a primo membro è detto *polinomio caratteristico* e le sue radici danno gli autovalori della matrice  $A$ , con le corrispondenti molteplicità.

Indichiamo con

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$$

le radici distinte di  $P(\lambda)$ , con molteplicità  $m_1, \dots, m_q$ , rispettivamente. Dalla teoria svolta per i sistemi lineari a coefficienti costanti deduciamo che le soluzioni dell'equazione (4.37), considerata in campo complesso, sono combinazioni lineari delle funzioni

$$t^j e^{\lambda_k t} \quad (k = 1, \dots, q, \quad j = 0, \dots, m_k - 1). \quad (4.42)$$

Notiamo come si tratti di un insieme di  $n$  funzioni: verifichiamo direttamente che si tratta di soluzioni di (4.37) e che sono linearmente indipendenti:

**TEOREMA 4.7.1** *Le funzioni (4.42) sono  $n$  soluzioni linearmente indipendenti di (4.37).*

Alla dimostrazione premettiamo alcune considerazioni.

Sia  $\mathbb{K}[z]$  l'anello dei polinomi nell'indeterminata  $z$  a coefficienti in  $\mathbb{K}$  (con  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ). Dato  $P \in \mathbb{K}[z]$ ,

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0,$$

definiamo l'operatore lineare

$$\begin{aligned} P(D) &: C^\infty(I) \rightarrow C^\infty(I) \\ P(D)y &= a_n D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \dots + a_0 y. \end{aligned}$$

L'applicazione  $P \mapsto P(D)$  è tale che

$$P + Q \mapsto P(D) + Q(D)$$

$$P \cdot Q \mapsto P(D) \circ Q(D) \quad (\text{composizione}).$$

Si tratta quindi di un isomorfismo fra  $\mathbb{K}[z]$  e un sottoanello *commutativo* dell'anello degli operatori differenziali lineari su  $C^\infty$  (si tratta del sottoanello generato dagli operatori di moltiplicazione e da  $D$ ).

Se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  allora il polinomio caratteristico di  $Ly = 0$  si decompone nella forma:

$$P(z) = a_n(z - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (z - \lambda_q)^{m_q},$$

quindi

$$P(D) = a_n(D - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (D - \lambda_q)^{m_q}.$$

La verifica che le funzioni (4.42) sono soluzioni dell'equazione  $Ly = 0$  è a questo punto una conseguenza immediata del seguente lemma (la cui dimostrazione è una facile verifica). Infatti:

$$(D - \lambda_k)^{m_k} (t^j e^{\lambda_k t}) = e^{\lambda_k t} D^{m_k} t^j$$

e il secondo membro è nullo se  $j < m_k$ .

LEMMA 4.7.2 *Dati  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $u \in C^\infty(\mathbb{R})$  e  $m \in \mathbb{N}$  risulta:*

$$(D - \lambda)^m (e^{\lambda t} u(t)) = e^{\lambda t} D^m u(t).$$

Per concludere la dimostrazione del Teorema 4.7.1 rimane da verificare l'indipendenza lineare delle funzioni (4.42). Consideriamo pertanto una loro combinazione lineare che dia la funzione nulla; in base all'espressione delle funzioni stesse ciò equivale a considerare  $q$  polinomi  $P_1, \dots, P_q$ , con  $P_k$  di grado non superiore a  $m_k - 1$ , tali che

$$P_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + P_q(t)e^{\lambda_q t} \equiv 0. \quad (4.43)$$

Mostriamo, per induzione su  $q$ , che questa condizione implica che tutti i polinomi sono nulli, e che quindi le funzioni (4.42) sono linearmente indipendenti. Chiaramente l'implicazione vale per  $q = 1$ . Valga per un valore  $q \in \mathbb{N}$  e dimostriamo che vale per  $q + 1$ . Dividendo per  $e^{\lambda_{q+1} t}$  entrambi i membri dell'identità (4.43), scritta con  $q + 1$  in luogo di  $q$ , si ottiene<sup>19</sup>:

$$P_1(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_{q+1})t} + \dots + P_q(t)e^{(\lambda_q - \lambda_{q+1})t} + P_{q+1}(t) \equiv 0.$$

Derivando  $m_{q+1}$  volte otteniamo:

$$Q_1(t)e^{(\lambda_1 - \lambda_{q+1})t} + \dots + Q_q(t)e^{(\lambda_q - \lambda_{q+1})t} \equiv 0,$$

dove  $Q_k$  è un polinomio dello stesso grado di  $P_k$ ; applicando l'ipotesi induttiva ogni  $Q_k$  è nullo per cui anche ogni  $P_k$  deve essere nullo.  $\square$

Se consideriamo le parti reali e immaginarie delle funzioni (4.42) otteniamo una base reale per le soluzioni dell'equazione omogenea  $Ly = 0$ :

TEOREMA 4.7.3 *Le soluzioni dell'equazione omogenea (4.37) sono tutte e sole le combinazioni lineari delle funzioni*

$$t^j e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad t^j e^{\alpha t} \sin \beta t$$

<sup>19</sup>è facile verificare che se  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e  $P(t)$  è un polinomio, allora

$$D[P(t)e^{\lambda t}] = Q(t)e^{\lambda t}$$

dove  $Q(t)$  è un polinomio dello stesso grado di  $P(t)$ .

al variare di  $\lambda = \alpha + i\beta$  fra le radici del polinomio caratteristico.

*Equazione completa.*

Vi è un caso notevole in cui è possibile determinare in modo standard una soluzione  $\bar{y}$  dell'equazione completa (4.36). Supponiamo che la funzione  $f$  a secondo membro sia della forma (conviene lavorare in campo complesso):

$$f(t) = P_m(t)e^{\lambda t}, \quad (4.44)$$

con  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $P_m(t)$  polinomio di grado  $m$ . Siano inoltre  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  le radici distinte del polinomio caratteristico di  $L$ , con molteplicità rispettive  $m_1, \dots, m_q$ .

In base al Lemma 4.7.2 risulta

$$Mf(t) \equiv 0, \quad \text{con } M = (D - \lambda)^{m+1}$$

Pertanto, se  $y$  è soluzione dell'equazione  $Ly = f$  allora  $(M \circ L)y = 0$ .<sup>20</sup> Distinguiamo ora due casi:

- se  $\lambda$  non è radice del polinomio caratteristico di  $L$  allora il polinomio caratteristico di  $M \circ L$  ha come radici  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ , con le rispettive molteplicità  $m_1, \dots, m_q$ , e  $\lambda$ , con molteplicità  $m + 1$ . In base al Teorema 4.7.1

$$y(t) = y_o(t) + Q(t)e^{\lambda t}$$

dove  $y_o$ , combinazione lineare di funzioni della forma  $t^j e^{\lambda_i t}$ , per  $i = 1, \dots, q$ , è una soluzione dell'equazione omogenea  $Ly = 0$ , mentre  $Q(t)$  è un opportuno polinomio di grado al più  $m$ . Esiste pertanto una soluzione della forma

$$\bar{y}(t) = Q(t)e^{\lambda t},$$

con  $Q(t)$  polinomio di grado al più  $m$ .

- sia invece  $\lambda$  radice del polinomio caratteristico di  $L$  con molteplicità  $\mu$ : ad esempio  $\lambda = \lambda_q$  e  $\mu = m_q$ . Allora il polinomio caratteristico di  $M \circ L$  presenta le radici  $\lambda_i$  ( $i \neq q$ ) con le rispettive molteplicità  $m_i$ , e  $\lambda$ , con molteplicità  $\mu + m + 1$ . Quindi

$$y(t) = \sum_{i=1}^{q-1} P_i(t)e^{\lambda_i t} + \tilde{Q}(t)e^{\lambda t},$$

con  $P_i(t)$  di grado al più  $m_i$  e  $\tilde{Q}(t)$  di grado al più  $\mu + m$ . Si osservi ora che, posto  $\tilde{Q}(t) = \sum_j c_j t^j$ , la funzione  $(\sum_{j=0}^{\mu-1} c_j t^j)e^{\lambda t}$  è soluzione dell'equazione omogenea, per cui possiamo scrivere

$$y(t) = y_o(t) + t^\mu Q(t)e^{\lambda t},$$

con  $Q(t)$  polinomio di grado al più  $m$ . Esiste pertanto una soluzione della forma

$$\bar{y}(t) = t^\mu Q(t)e^{\lambda t}.$$

Riassumendo:

se nell'equazione  $Ly = f$  il secondo membro è dato da (4.44), con  $P_m(t)$  di grado  $m$ , allora esiste una soluzione della forma

$$\bar{y}(t) = t^\mu Q(t)e^{\lambda t},$$

dove  $Q(t)$  è un polinomio di grado non superiore a  $m$  e  $\mu$  è la molteplicità di  $\lambda$  come radice del polinomio caratteristico di  $L$  (quindi  $\mu = 0$  se non è radice).

<sup>20</sup>Per questo motivo il metodo ora descritto è anche detto degli *annichilatori*.

Il polinomio  $Q(t)$  viene individuato determinandone i coefficienti in modo che  $t^\mu Q(t)e^{\lambda t}$  sia soluzione di  $Ly = f$ .

Se lavoriamo in campo reale non è difficile verificare che: se

$$f(t) = e^{\alpha t}[P_h(t) \cos \beta t + Q_k(t) \sin \beta t],$$

con  $P_h$  e  $Q_k$  polinomi di gradi  $h$  e  $k$ , rispettivamente, allora è possibile determinare una soluzione  $\bar{y}$  secondo la seguente regola:

- se  $\alpha \pm i\beta$  non è radice del polinomio caratteristico, allora esiste  $\bar{y}$  della forma:

$$\bar{y}(t) = e^{\alpha t}[R(t) \cos \beta t + S(t) \sin \beta t].$$

con  $R$  e  $S$  polinomi di grado al più  $\max\{h, k\}$ ;

- se  $\alpha \pm i\beta$  è radice di molteplicità  $\mu$  del polinomio caratteristico, allora esiste  $\bar{y}$  della forma:

$$\bar{y}(t) = t^\mu e^{\alpha t}[R(t) \cos \beta t + S(t) \sin \beta t].$$

con  $R$  e  $S$  come sopra.

La determinazione effettiva di  $\bar{y}$  avviene determinando i coefficienti dei polinomi  $R$  e  $S$  in modo che la funzione  $\bar{y}$  sia soluzione.

ESEMPIO Consideriamo l'equazione

$$y'' - 3y' + 2y = f(t),$$

con  $f(t) = (1 + 3t)e^{4t}$ . Rientriamo nelle condizioni dell'osservazione precedente con  $\alpha + i\beta = 4$ ; poichè questo valore non è radice del polinomio caratteristico, è possibile determinare una soluzione  $\bar{y}$  della forma:

$$\bar{y}(t) = (a + bt)e^{4t},$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$  da determinare. Se imponiamo che questa funzione sia soluzione otteniamo  $a = -1/4$  e  $b = 1/2$ .

Se invece avessimo  $f(t) = (1 + 3t)e^{2t}$ , poichè  $\alpha = 2$  è radice (semplice) del polinomio caratteristico, cerchiamo  $\bar{y}$  della forma:

$$\bar{y}(t) = t(a + bt)e^{2t},$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$  da determinare. Svolgendo i calcoli risulta  $\bar{y}(t) = ((3/2)t^2 - 2t)e^{2t}$ .

## 4.8 SISTEMI OMOGENEI AUTONOMI: IL CASO BIDIMENSIONALE

Analizziamo più in dettaglio le soluzioni di un sistema differenziale lineare omogeneo e autonomo nel caso bidimensionale:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad (4.45)$$

con  $A = (a_{ij})$  matrice a elementi reali. A seconda che  $A$  presenti autovalori reali e sia o meno diagonalizzabile, oppure presenti autovalori complessi (necessariamente distinti), abbiamo visto che, mediante un opportuno cambiamento di variabile lineare  $x = P\tilde{x}$ , possiamo ricondurci a un sistema lineare  $\tilde{x}' = \tilde{A}\tilde{x}$  la cui matrice rientra in uno dei seguenti casi:

$$I) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ con } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R};$$

$$II) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R};$$

$$III) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0.$$

Se  $P = (v_1|v_2)$  ogni soluzione  $\tilde{x}(\cdot) = (\tilde{x}_1(\cdot), \tilde{x}_2(\cdot))$  dà luogo alla soluzione  $x(\cdot) = \tilde{x}_1(\cdot)v_1 + \tilde{x}_2(\cdot)v_2$  per il sistema  $x' = Ax$ , cioè  $\tilde{x}_1$  e  $\tilde{x}_2$  rappresentano le coordinate del punto corrente dell'orbita nella base  $(v_1, v_2)$ .

Nell'analisi che segue supporremo direttamente che la matrice  $A$  sia delle tipologie (I), (II) o (III) elencate sopra. Supporremo inoltre che nessun autovalore sia nullo (se così non fosse si vede facilmente che le traiettorie sarebbero rettilinee: infatti, il determinante di  $A$  sarebbe nullo, per cui le righe della matrice sarebbero proporzionali).

CASO (I): autovalori reali, matrice diagonalizzabile. Le soluzioni sono date da

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1^0 e^{\lambda_1 t}, \\ x_2(t) = x_2^0 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \quad (4.46)$$

al variare del punto  $x_0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$ . Se  $x_0$  si trova su uno degli assi coordinati (cioè  $x_1^0 = 0$  oppure  $x_2^0 = 0$ ), allora tutta l'orbita rimane su quell'asse. Altrimenti sia, ad esempio,  $x_1^0 > 0$  e  $x_2^0 > 0$  (lo studio dell'orbita negli altri quadranti è analogo). Supponiamo inoltre di aver scelto le coordinate in modo che  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ . Dall'espressione delle soluzioni si ricava rapidamente l'equazione delle orbite, poiché

$$x_2 = x_2^0 (e^{\lambda_1 t})^{\lambda_2/\lambda_1} = x_2^0 (x_1/x_1^0)^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

Se teniamo conto dell'arbitrarietà del punto  $(x_1^0, x_2^0)$  nel primo quadrante, concludiamo che la famiglia delle orbite in tale regione del piano è descritta dall'equazione

$$x_2 = \gamma x_1^{\lambda_2/\lambda_1}$$

al variare di  $\gamma > 0$ .

Se  $\lambda_1 < \lambda_2$  la tipologia delle orbite dipende dal segno di  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Si vedano le Figure 4.2 e 4.3: le frecce indicano l'orientamento corrispondente al parametro  $t$  crescente e può essere immediatamente desunto dalle equazioni (4.46). Se gli autovalori sono dello stesso segno si dice che l'origine è un *nodo* (stabile o instabile a seconda che il segno degli autovalori sia negativo o positivo); mentre se gli autovalori sono di segno opposto si parla dell'origine come *punto di sella*.

Se  $\lambda_1 = \lambda_2$  le orbite sono semirette uscenti dall'origine: ci si riferisce a questa situazione anche dicendo che l'origine è un *nodo a stella*.

CASO (II): autovalori reali e coincidenti, matrice non diagonalizzabile. In tal caso le soluzioni sono date da:

$$\begin{cases} x_1 = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t} \\ x_2 = c_2 e^{\lambda t} \end{cases} \quad (4.47)$$

al variare di  $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ : tale punto rappresenta il valore iniziale  $x(0)$ . Se  $c_2 = x_2(0) = 0$  allora l'orbita è tutta sull'asse  $x_1$ . Altrimenti sia, ad esempio,  $c_2 = x_2(0) > 0$ ; possiamo allora porre l'equazione dell'orbita nella forma:

$$x_1 = \frac{x_2}{\lambda} (\log x_2 + \lambda \frac{c_1}{c_2} - \log c_2).$$



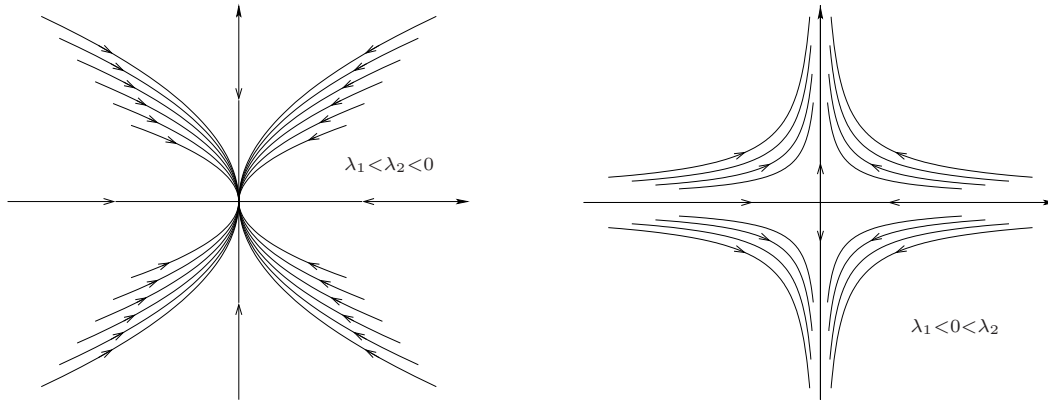


Figura 4.2 - Nodo stabile e punto di sella

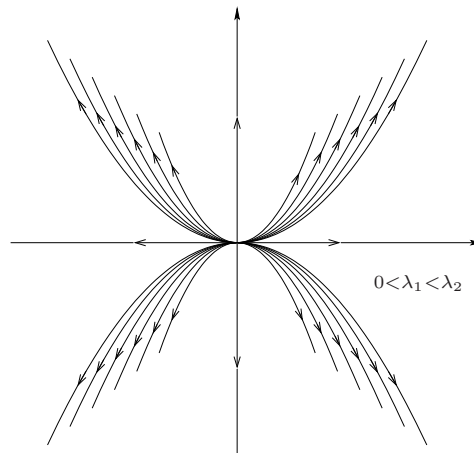


Figura 4.3 - Nodo instabile

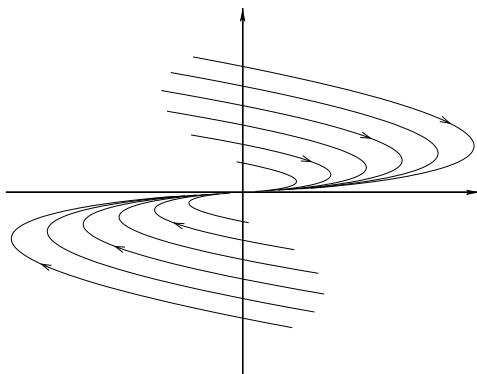


Figura 4.4 - Nodo improprio stabile ( $\lambda < 0$ )

Per l'arbitrarietà di  $c_1$  e  $c_2$  la famiglia delle orbite nel semipiano  $x_2 > 0$  si può anche scrivere come:<sup>21</sup>

$$x_1 = \frac{x_2}{\lambda}(\log x_2 + \gamma), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

In tal caso si parla dell'origine come *nodo improprio* (Figura 4.4). Al crescere di  $t$  il punto  $x(t)$  si avvicina o si allontana dall'origine a seconda del segno di  $\lambda$ , come si può vedere dall'equazione (4.47).

CASO (III): autovalori complessi coniugati. Le soluzioni sono date da:

$$\begin{cases} x_1 = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) \\ x_2 = e^{\alpha t}(-c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t) \end{cases}.$$

al variare di  $x(0) = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ . Nell'ipotesi in cui  $c_1$  e  $c_2$  non siano contemporaneamente nulli, se poniamo

$$K = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} > 0, \quad \cos \varphi = c_1/K, \quad \sin \varphi = c_2/K,$$

possiamo esprimere le soluzioni come

$$\begin{cases} x_1 = K e^{\alpha t} \cos(\varphi - \beta t) \\ x_2 = K e^{\alpha t} \sin(\varphi - \beta t) \end{cases}.$$

Pertanto, in coordinate polari, le traiettorie hanno equazione parametriche

$$\begin{cases} \varrho = K e^{\alpha t} \\ \vartheta = \varphi - \beta t \end{cases}$$

e quindi, eliminando  $t$ ,

$$\varrho = C e^{-(\alpha/\beta)\vartheta}, \tag{4.48}$$

<sup>21</sup>A questa equazione possiamo giungere anche applicando i ragionamenti esposti nel paragrafo 3.7. Infatti la forma differenziale

$$\omega(x_1, x_2) = \lambda x_2 dx_1 - (\lambda x_1 + x_2) dx_2$$

non è esatta, ma ha  $1/x_2^2$  come fattore integrante. Si ottiene

$$\frac{1}{x_2^2} \omega(x_1, x_2) = dH(x_1, x_2), \quad \text{con } H(x_1, x_2) = \lambda \frac{x_1}{x_2} - \log x_2,$$

da cui l'equazione  $H(x_1, x_2) = \gamma$  per le orbite.

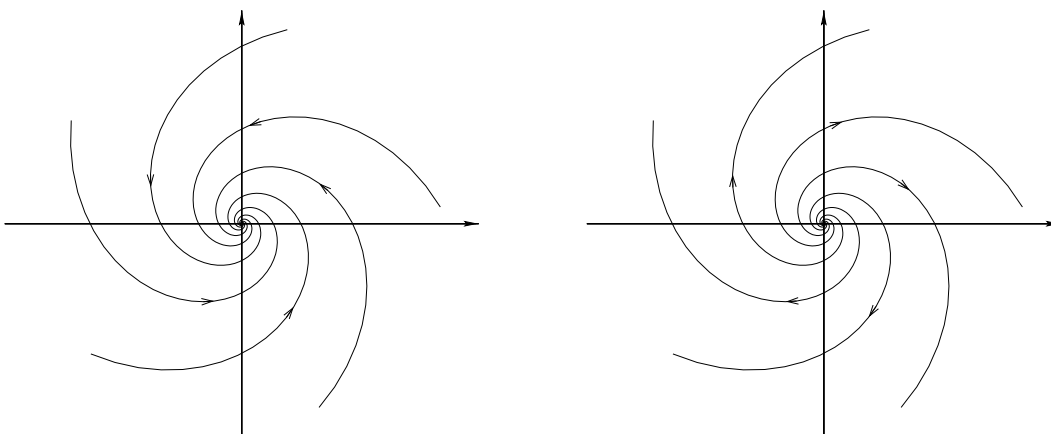


Figura 4.5 - Fuoco stabile ( $\alpha < 0$ ) e instabile ( $\alpha > 0$ )

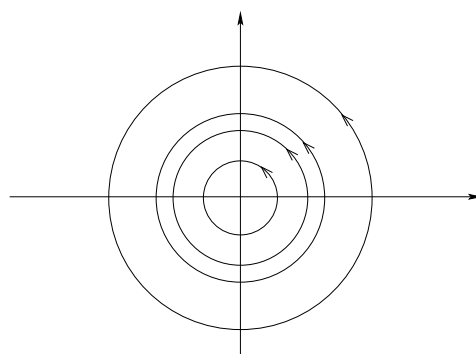


Figura 4.6 - Centro (autovalori  $\pm i\beta$ ); l'orientamento delle traiettorie dipende dal segno di  $\beta$

con  $C \geq 0$  costante arbitraria.<sup>22</sup>

Se  $\alpha \neq 0$  la (4.48) descrive delle spirali logaritmiche, che si avvolgono attorno all'origine al crescere o al decrescere di  $\vartheta$  secondo che il rapporto  $\alpha/\beta$  sia positivo o negativo, rispettivamente. In tal caso ci si riferisce all'origine come a un *fuoco*. In Figura 4.5 è rappresentata la situazione  $\alpha/\beta > 0$ . Il verso delle frecce si deduce subito dalla relazione  $\varrho = Ke^{\alpha t}$ .

Se  $\alpha = 0$  le orbite descritte da (4.48) sono circonferenze. In tal caso l'origine è detto *centro* (vedi Figura 4.6).

OSSERVAZIONE 4.8.1 Notiamo che il caso degli autovalori reali e coincidenti ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ) e quello degli autovalori complessi coniugati con parte reale nulla ( $\pm i\beta$ ) possono essere visti come “casi limite” delle situazioni in cui gli autovalori sono reali e distinti o complessi coniugati con parte reale non nulla, rispettivamente: si tratta, pertanto, dei casi più suscettibili di cambiamenti di tipologia

<sup>22</sup>Come nel caso precedente, possiamo ricavare questa equazione scrivendo la forma differenziale  $(\beta x_1 - \alpha x_2) dx_1 + (\alpha x_1 + \beta x_2) dx_2$  in coordinate polari (cfr. (3.22)), ottenendo l'equazione:  $\beta \varrho d\varrho + \alpha \varrho^2 d\vartheta = 0$ , cioè, per  $\varrho \neq 0$ ,

$$d(\beta \log \varrho + \alpha \vartheta) = \frac{\beta}{\varrho} d\varrho + \alpha d\vartheta = 0.$$

Da qui la (4.48).

per “piccole perturbazioni”.



(ciascun blocco ha la diagonale principale sulla diagonale principale di  $A$ ). La matrice  $A_k$  è di tipo  $m_k \times m_k$  con  $m_k = \dim V_k$ . Inoltre

$A_k$  è la matrice associata a  $T|_{V_k}$  in  $\mathcal{B}_k$ .

Assegnate due basi  $\mathcal{B}$  e  $\tilde{\mathcal{B}}$  di  $V$ , vediamo quale relazione sussiste fra le matrici  $A$  e  $\tilde{A}$  associate a  $T$  nelle due basi. Dato  $v \in V$ , siano  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$  le  $n$ -uple delle componenti di  $v$  in  $\mathcal{B}$  e  $\tilde{\mathcal{B}}$ , rispettivamente; allora le componenti di  $Tv$  nelle due basi sono  $Ax$  e  $\tilde{A}\tilde{x}$ ; secondo la (4.50) deve pertanto essere

$$Ax = P\tilde{A}\tilde{x},$$

da cui, poiché  $x = P\tilde{x}$ ,

$$\tilde{A} = P^{-1}AP. \quad (4.52)$$

Quindi  $A$  e  $\tilde{A}$ , matrici associate a  $T$  nelle basi  $\mathcal{B}$  e  $\tilde{\mathcal{B}}$  rispettivamente, sono tra loro simili.

**Autovalori e autospazi. Diagonalizzabilità.** Sia  $T: V \rightarrow V$  un operatore lineare. Fondamentale è la seguente definizione.

**DEFINIZIONE 4.8.4** Un elemento  $\lambda \in \mathbb{K}$  si dice autovalore di  $T$  se esiste  $v \in V \setminus \{0\}$  tale che

$$Tv = \lambda v. \quad (4.53)$$

Tali vettori sono detti autovettori di  $T$  relativi a  $\lambda$ . Il sottospazio  $E(\lambda) = \ker(T - \lambda I)$  è detto autospazio di  $T$  relativo a  $\lambda$ .

Se  $A$  è la matrice associata all'operatore  $T$  in una fissata base, l'equazione (4.53) diventa

$$Ax = \lambda x,$$

dove  $x$  è il vettore delle componenti di  $v$ . D'altro canto, ad ogni matrice  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{K})$  rimane associato l'operatore lineare

$$T = T^A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n \quad \text{definito da} \quad T^A(x) = Ax.$$

Se la matrice è a coefficienti reali possiamo considerare sia l'operatore  $T_{\mathbb{R}}^A: x \mapsto Ax: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  che l'operatore<sup>23</sup>  $T_{\mathbb{C}}^A: x \mapsto Ax: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ . Come autovalori di  $A$  intenderemo gli autovalori di  $T_{\mathbb{C}}^A$ .

**PROPOSIZIONE 4.8.5** Data  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{K})$ , un elemento  $\lambda \in \mathbb{K}$  è autovalore di  $A$  se e solo se  $\lambda$  è radice del seguente polinomio, detto polinomio caratteristico di  $A$ :

$$p(z) = \det(A - zI).$$

*Dimostrazione.* L'esistenza di una soluzione  $x$  non nulla dell'equazione  $(A - \lambda I)x = 0$  equivale alla richiesta che  $\det(A - \lambda I) = 0$ .  $\square$

Questo risultato implica, in particolare, che il polinomio caratteristico di matrici associate allo stesso operatore coincidono (del resto, se  $P$  è una matrice invertibile, un'applicazione del Teorema di Binet dà:

$$\det(P^{-1}AP - zI) = \det P^{-1}(A - zI)P = \det(A - zI),$$

<sup>23</sup>L'analogo passaggio nel caso di un generico spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{R}$  è la *complettizzazione* dell'operatore  $T$  (e dello spazio  $V$ ).

per cui matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico; e le matrici associate a un operatore lineare  $T: V \rightarrow V$  sono legate dalla relazione di similitudine). Ciò permette di definire il polinomio caratteristico di un operatore  $T: V \rightarrow V$  come polinomio caratteristico della matrice associata a  $T$  in una qualunque fissata base.

OSSERVAZIONE 4.8.6 Mettiamo in evidenza il vantaggio di studiare in  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  anche il caso delle matrici a elementi reali: infatti, poiché  $\mathbb{C}$  è algebricamente chiuso, il polinomio caratteristico ha esattamente  $n$  soluzioni, contate con la dovuta molteplicità.

Diciamo *molteplicità algebrica* di un autovalore  $\lambda$  la molteplicità  $m(\lambda)$  di  $\lambda$  come radice del polinomio caratteristico. Diciamo *molteplicità geometrica* di  $\lambda$  la dimensione  $\rho(\lambda)$  dell'autospazio  $E(\lambda)$ .

Se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  sono gli autovalori distinti di  $T$  allora:

$$m(\lambda_1) + \dots + m(\lambda_q) = n. \quad (4.54)$$

È utile ricordare il seguente risultato, di facile verifica.

PROPOSIZIONE 4.8.7 *Dati  $V_1, \dots, V_q$  sottospazi di  $V$ , le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- a) se  $\sum_i v_i = 0$ , con  $v_i \in V_i$ , allora  $v_i = 0$  per ogni  $i$ ;
- b)  $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{0\}$ .

In tal caso si dice che i sottospazi  $V_1, \dots, V_q$  sono indipendenti o che sono in somma diretta e il sottospazio  $V_1 + \dots + V_q$  si indica con  $V_1 \oplus \dots \oplus V_q$ . In tal caso, una base di  $V_1 \oplus \dots \oplus V_q$  si ottiene considerando, ordinatamente, gli elementi di una base di  $V_1$ , di  $V_2$ , ..., di  $V_q$ .

PROPOSIZIONE 4.8.8 *Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  gli autovalori distinti di  $T$ . Allora i sottospazi  $E(\lambda_1), \dots, E(\lambda_q)$  sono in somma diretta.*

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione su  $q$ . Siano  $q = 2$  e  $v_i \in E(\lambda_i)$  ( $i = 1, 2$ ) tali che  $v_1 + v_2 = 0$ , cioè  $v_1 = -v_2$ ; allora  $0 = T(v_1 + v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)v_2$ . Poiché  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , deve essere  $v_2 = 0$ , quindi anche  $v_1 = 0$ . Valga ora la proprietà per ogni intero naturale minore di un fissato valore  $q$ . Siano  $v_i \in E(\lambda_i)$  tali che  $v_1 + \dots + v_q = 0$ ; allora  $v_1 = -(v_2 + \dots + v_q)$ , così che

$$\begin{aligned} 0 &= T(v_1 + \dots + v_q) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_q v_q = -\lambda_1(v_2 + \dots + v_q) + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_q v_q \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \dots + (\lambda_q - \lambda_1)v_q. \end{aligned}$$

Per l'ipotesi induttiva  $v_2 = \dots = v_q = 0$ , quindi anche  $v_1 = 0$ .  $\square$

PROPOSIZIONE 4.8.9 *Per ogni autovalore  $\lambda$  risulta  $\rho(\lambda) \leq m(\lambda)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $r = \rho(\lambda)$  e  $\mathcal{B}$  una base di  $V$  i cui primi  $r$  elementi costituiscano una base di  $E(\lambda)$ . Poiché  $(T - \lambda I)E(\lambda) = \{0\}$ , la matrice associata a  $T - \lambda I$  in  $\mathcal{B}$  ha nulle le prime  $r$  colonne. Pertanto il polinomio caratteristico  $p(z)$  di  $T$  ha come fattore il polinomio  $(z - \lambda)^r$ . Allora  $p(z)$  presenta la radice  $\lambda$  almeno con molteplicità  $r$ .  $\square$

PROPOSIZIONE 4.8.10 *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- a)  $T$  è diagonalizzabile (cioè esiste una base di  $V$  rispetto a cui la matrice associata a  $T$  è diagonale);

b) esiste una base di  $V$  costituita da autovettori di  $T$ .

c) detti  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$  gli autovalori distinti di  $T$ , risulta

$$V = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \dots \oplus E(\lambda_q).$$

Inoltre, se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , equivalente a queste è la proprietà:

d) per ogni autovalore la molteplicità algebrica coincide con quella geometrica.

In tali condizioni, la matrice associata a  $T$  in una qualunque base formata da autovettori è diagonale.

In particolare, se  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  e  $T$  ha tutti gli autovalori semplici allora è diagonalizzabile.

*Dimostrazione.* L'equivalenza fra (a) e (b) è immediata poiché il fatto che  $T$  si esprima in una base  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  mediante una matrice diagonale  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  equivale ad affermare che le componenti di  $Tv_i$  nella base  $\mathcal{B}$  sono date da  $De_i$  (con  $e_i$   $i$ -esimo elemento della base canonica di  $\mathbb{C}^n$ ), cioè  $Tv_i = \lambda_i v_i$ : questa uguaglianza traduce il fatto che  $v_i$  è un autovettore.<sup>24</sup>

In base alla Proposizione 4.8.8 possiamo considerare la somma diretta  $E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \dots \oplus E(\lambda_q)$ , che risulta essere un sottospazio di dimensione  $\varrho(\lambda_1) + \dots + \varrho(\lambda_q)$ . Nell'ipotesi  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , poiché  $\varrho(\lambda_i) \leq m(\lambda_i)$  (Proposizione 4.8.9) e  $m(\lambda_1) + \dots + m(\lambda_q) = n = \dim V$ , ne segue l'equivalenza di (c) e (d).

Se teniamo conto della Proposizione 4.8.8, la proprietà (b) sussiste se e solo se  $V = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \dots \oplus E(\lambda_q)$ , e questo è vero se e solo se vale (c).  $\square$

OSSERVAZIONE 4.8.11 È utile notare esplicitamente, ricordando l'Osservazione 4.8.2 e il risultato precedente, che se  $V = \mathbb{C}^n$  e  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  è una base di  $\mathbb{C}^n$  costituita da autovettori di  $A$ , allora la matrice  $P = (v_1 \mid v_2 \mid \dots \mid v_n)$  che ha come colonne tali autovettori diagonalizza  $A$ , cioè  $P^{-1}AP$  è diagonale.

*Autospazi generalizzati.*

Indichiamo con  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  gli autovalori distinti dell'operatore  $T: V \rightarrow V$ , di molteplicità algebriche  $m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_q)$ , rispettivamente.

Se  $T$  non è diagonalizzabile allora  $V$  non possiede una base di autovettori, per cui non può essere espresso come somma diretta dei suoi autospazi. Il ruolo di questi viene invece svolto dai cosiddetti *autospazi generalizzati*.

Svolgiamo dapprima alcune osservazioni preliminari. Data un'applicazione lineare  $T: V \rightarrow V$ , risulta

$$\begin{aligned} \ker T &\subseteq \ker T^2 \subseteq \dots \subseteq \ker T^k \subseteq \ker T^{k+1} \subseteq \dots \\ \text{Im } T &\supseteq \text{Im } T^2 \supseteq \dots \supseteq \text{Im } T^k \supseteq \text{Im } T^{k+1} \supseteq \dots \end{aligned}$$

È immediato verificare che sono tutti sottospazi  $T$ -invarianti, cioè sottospazi  $W$  per i quali  $T(W) \subseteq W$ . Poiché la dimensione di  $V$  è finita, esiste  $s \leq n$  per il quale

$$\ker T^s = \ker T^{s+1}.$$

Sia  $\nu = \dim \ker T^s$ . Dal momento che  $\dim \text{Im } T^s = n - \nu = \dim \text{Im } T^{s+1}$ , ne segue che

$$\text{Im } T^s = \text{Im } T^{s+1}.$$

<sup>24</sup>Del resto, anche esprimendo la diagonalizzabilità direttamente come esistenza di una matrice  $P$  tale che  $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , si ottiene  $AP = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , cioè  $Av_i = \lambda_i v_i$  se  $v_i$  è la  $i$ -esima colonna di  $A$ .



Osserviamo che se  $\ker T^s = \ker T^{s+1}$  (e quindi  $\operatorname{Im} T^s = \operatorname{Im} T^{s+1}$ ), allora risulta anche  $\ker T^{s+1} = \ker T^{s+2} = \ker T^{s+3} = \dots$ ; infatti, se  $v \in \ker T^{s+2}$  allora  $Tv \in \ker T^{s+1} = \ker T^s$ , quindi  $T^sTv = 0$ , cioè  $v \in \ker T^{s+1}$ . Quindi  $\ker T^{s+1} = \ker T^{s+2}$  (si procede per induzione).

Dimostriamo ora che

$$V = \ker T^s \oplus \operatorname{Im} T^s.$$

A tal fine è sufficiente dimostrare che  $\ker T^s \cap \operatorname{Im} T^s = \{0\}$ , poichè in tal caso  $\dim(\ker T^s + \operatorname{Im} T^s) = n$  per cui  $\ker T^s + \operatorname{Im} T^s = V$ . Sia pertanto  $v \in \ker T^s \cap \operatorname{Im} T^s$ ; allora esiste  $w \in V$  per il quale  $T^s w = v$ , per cui  $0 = T^s v = T^{2s} w$  e quindi  $w \in \ker T^{2s}$ . Per quanto sopra osservato,  $\ker T^j = \ker T^s$  per  $j \geq s$ ; allora  $w \in \ker T^s$ , da cui  $v = T^s w = 0$ .

Infine, osserviamo che, se  $\ker T^s$  non è banale, allora  $T$  ha, su  $\ker T^s$ , solo l'autovalore nullo, poichè la relazione  $T(v) = \lambda v$  con  $v \in \ker T^s$  dà  $T^2(v) = \lambda T(v) = \lambda^2 v, \dots, 0 = T^s(v) = \lambda^s v$ , da cui  $\lambda = 0$ .

Del resto,  $T|_{\operatorname{Im} T^s}$  non può presentare 0 come autovalore, perché  $\ker(T - 0I) = \ker T \subseteq \ker T^s$ , e quest'ultimo ha intersezione nulla con  $\operatorname{Im} T^s$ .

Riassumiamo questi risultati nel seguente enunciato.

LEMMA 4.8.12 (DECOMPOSIZIONE DI FITTING) *Sia  $T: V \rightarrow V$  un'applicazione lineare. Allora:*

a) *esiste  $s \leq n = \dim V$  tale che*

$$\ker T^s = \ker T^{s+1}, \quad \operatorname{Im} T^s = \operatorname{Im} T^{s+1}. \quad (4.55)$$

b) *Se  $s$  soddisfa la (4.55), allora  $\ker T^s$  e  $\operatorname{Im} T^s$  sono sottospazi  $T$ -invarianti e*

$$V = \ker T^s \oplus \operatorname{Im} T^s.$$

*Inoltre,  $T|_{\operatorname{Im} T^s}$  non può presentare l'autovalore nullo, mentre se  $\ker T^s$  è non banale, allora  $T|_{\ker T^s}$  ha solo l'autovalore nullo.*

La decomposizione in somma diretta di cui al punto (b) del lemma precedente e la struttura diagonale a blocchi della matrice associata a  $T$  secondo la Proposizione 4.8.3 permettono di spezzare il polinomio caratteristico nel prodotto dei polinomi caratteristici di  $T|_{\ker T^s}$  e  $T|_{\operatorname{Im} T^s}$ . In particolare, se 0 è autovalore di  $T$  di molteplicità  $m$ , allora

$$\dim \ker T^s = m, \quad \text{quindi } s \leq m.$$

Applichiamo ora questi risultati all'operatore  $T - \lambda I$ , dove  $\lambda$  è un autovalore di  $T$ ; otteniamo una decomposizione  $\mathbb{C}^n = V_\lambda \oplus W$  tale che  $T$  ha solo l'autovalore  $\lambda$  su  $V_\lambda$ , e autovalori diversi da  $\lambda$  su  $W$  (*separazione degli autovalori*). Inoltre,  $V_\lambda$  e  $W$  sono  $T$ -invarianti (perché  $(T - \lambda I)$ -invarianti).

Il sottospazio  $V_\lambda = \ker(T - \lambda I)^s$  è il cosiddetto *autospazio generalizzato* relativo a  $\lambda$ , indicato con  $E'(\lambda)$ . Possiamo anche porre, equivalentemente:

DEFINIZIONE 4.8.13 *Si dice autospazio generalizzato relativo all'autovalore  $\lambda$  il sottospazio*

$$E'(\lambda) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \ker(T - \lambda I)^j.$$

La proposizione seguente riassume le proprietà fondamentali di questi sottospazi ricavate sopra.

PROPOSIZIONE 4.8.14 *Sia  $\lambda$  autovalore di  $T$  con molteplicità algebrica  $m$ . Allora:*

- a)  $E'(\lambda) = \ker(T - \lambda I)^s$  per un opportuno  $s \in \mathbb{N}$ . Inoltre  $\dim E'(\lambda) = m$  e risulta  $s \leq m$ .
- b)  $T: E'(\lambda) \rightarrow E'(\lambda)$  cioè  $T(E'(\lambda)) \subseteq E'(\lambda)$ .
- c)  $\lambda$  è l'unico autovalore di  $T|_{E'(\lambda)}$ .

A questo punto un'applicazione ripetuta della decomposizione di Fitting fornisce il seguente risultato.

TEOREMA 4.8.15 Sia  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  e indichiamo con  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  gli autovalori distinti di  $T$ . Allora:

$$V = E'(\lambda_1) \oplus E'(\lambda_2) \oplus \dots \oplus E'(\lambda_q).$$

Questa decomposizione di  $\mathbb{C}^n$  in somma diretta dà luogo a una matrice  $A$  associata a  $T$  come indicato nella Proposizione 4.8.3, con  $V_k = E'(\lambda_k)$ :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & & \\ & \boxed{A_2} & & & \\ & & \boxed{A_3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{A_q} \end{pmatrix}, \tag{4.56}$$

dove:

$A_k$  è la matrice associata a  $T|_{E'(\lambda_k)}$  rispetto a  $\mathcal{B}_k$ .

*Forma canonica di Jordan.*

Si può dimostrare che è possibile scegliere una base per ogni autospatio generalizzato  $E'(\lambda_k)$  in modo che la matrice (4.56) associata a  $T$  sia di 'forma speciale'. Poichè  $T$  trasforma ogni  $E'(\lambda_k)$  in sé, il problema può chiaramente essere riformulato per un operatore  $T: V \rightarrow V$  con un solo autovalore  $\lambda$  di molteplicità  $n$  (quindi  $E'(\lambda) = V$ ). Prima di enunciare il risultato premettiamo una definizione.

DEFINIZIONE 4.8.16 a) Si dice blocco di Jordan di ordine  $r$ , o matrice elementare di Jordan di ordine  $r$ , associato a  $\lambda$ , la matrice di ordine  $r$ :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

b) Si dice matrice di Jordan di ordine  $n$  una matrice di ordine  $n$  della forma:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & & & \\ & \boxed{B_2} & & & \\ & & \boxed{B_3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{B_s} \end{pmatrix}, \tag{4.57}$$

dove  $B_1, \dots, B_s$  sono blocchi di Jordan.

Il blocco di ordine  $r = 1$  relativo a  $\lambda$  è semplicemente la matrice  $(\lambda)$  di tipo  $1 \times 1$ .

**TEOREMA 4.8.17** Sia  $T: V \rightarrow V$  un operatore lineare e sia  $\lambda \in \mathbb{C}$  autovalore di molteplicità  $n = \dim V$ . Allora esiste una base di  $V$  rispetto a cui la matrice associata a  $T$  è una matrice di Jordan con blocchi associati a  $\lambda$ . Tale matrice è univocamente individuata da  $T$  a meno di una permutazione dei blocchi.

Il caso diagonalizzabile corrisponde al situazione in cui tutti i blocchi sono di ordine 1.

Il teorema precedente, applicato ad ogni blocco della rappresentazione (4.56) dà subito il seguente risultato.

**TEOREMA 4.8.18 (FORMA CANONICA DI JORDAN)** Sia  $T: V \rightarrow V$  un operatore lineare. Allora esiste una base di  $V$  rispetto a cui la matrice associata a  $T$  è una matrice di Jordan formata da blocchi associati agli autovalori di  $T$ . Tale matrice è unica a meno di una permutazione dei blocchi.

**OSSERVAZIONE 4.8.19** Mentre la determinazione della matrice (4.56) associata a  $T$  può essere ottenuta dalla scelta di una qualunque base per ciascun  $E'(\lambda_k)$ , il calcolo della forma di Jordan  $J$  richiede l'individuazione di una particolare base; una base in cui accanto ad ogni elemento vi siano tutte le controimmagini iterate tramite  $T - \lambda I$ . Data una base dell'autospazio  $E(\lambda)$ , a partire da ciascuno dei suoi elementi si costruiscono in tal modo i vettori di una base di  $E'(\lambda)$  corrispondenti a un blocco di Jordan. Ad esempio, se  $E(\lambda) = \langle v, w \rangle$  e

$$\begin{aligned} (T - \lambda I)v' &= v, & (T - \lambda I)v'' &= v', & v'' &\notin \text{Im}(T - \lambda I) \\ (T - \lambda I)w' &= w, & w' &\notin \text{Im}(T - \lambda I), \end{aligned}$$

allora, chiaramente, rispetto alla base  $(v, v', v'', w, w')$  di  $\mathbb{C}^5$  la matrice associata a  $T - \lambda I$  è:

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \hline & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{array} \right), \quad \text{quindi la matrice di } T \text{ è } \left( \begin{array}{ccc|cc} \lambda & 1 & 0 & & \\ 0 & \lambda & 1 & & \\ 0 & 0 & \lambda & & \\ \hline & & & \lambda & 1 \\ & & & 0 & \lambda \end{array} \right).$$

In generale il numero dei blocchi è pari alla molteplicità geometrica di  $\lambda$ . (Per i dettagli sulla struttura della forma di Jordan si veda, ad esempio, [11]).

*Matrici reali con autovalori complessi. Forma canonica reale.*

Consideriamo ora il caso di una matrice  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$  che non abbia necessariamente tutti gli autovalori reali. La matrice (4.56) associata a  $T$  può comunque essere ottenuta utilizzando una base complessa. Poiché la matrice è a elementi reali, se  $\mu$  e  $\bar{\mu}$  sono due autovalori coniugati le basi per i corrispondenti autospazi possono essere scelte fra loro coniugate; pertanto, se  $w_1, w_2, \dots, w_m$  è una base di  $E'(\mu)$  allora

$$w_1, w_2, \dots, w_m, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_m$$

è una base di  $E'(\mu) \oplus E'(\bar{\mu})$ . A questa possiamo sostituire la base reale ottenuta prendendo la parte reale e immaginaria dei  $w_j$ :

$$z_1, \zeta_1, z_2, \zeta_2, \dots, z_m, \zeta_m, \quad \text{dove } z_j = \frac{w_j + \bar{w}_j}{2}, \quad \zeta_j = \frac{w_j - \bar{w}_j}{2i}. \quad (4.58)$$

Se indichiamo con

$$\lambda_1, \dots, \lambda_r \quad \text{autovalori reali}$$



un autovettore relativo all'autovalore  $i$  è, ad esempio,

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Seguendo quanto indicato nell'Osservazione 4.8.19 (vedi anche la seconda parte dell'esempio svolto a pag. 90), cerchiamo un vettore  $v_2$  soddisfacente la relazione

$$(A - iI)v_2 = v_1.$$

Risulta, ad esempio,

$$v_2 = \begin{pmatrix} (1/2) + i \\ -1 + 2i \\ -i/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente,  $(A - iI)^2 v_2 = 0$ , per cui  $v_2 \in \ker(T - iI)^2 = E'(i)$ . Rispetto alla base  $(v_1, v_2)$  la matrice associata all'operatore  $(T - iI)|_{E'(i)}$  è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Quindi la matrice associata a  $T$  nella base  $(v_1, v_2, \bar{v}_1, \bar{v}_2)$  è in forma canonica di Jordan:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} i & 1 & & \\ 0 & i & & \\ \hline & & -i & 1 \\ & & 0 & -i \end{array} \right)$$

Invece, rispetto alla base

$$(\operatorname{Re} v_1, \operatorname{Im} v_1, \operatorname{Re} v_2, \operatorname{Im} v_2),$$

la matrice associata a  $T$  è data da  $P^{-1}AP$ , dove  $P$  è la matrice che ha nelle colonne gli elementi di tale base. Svolgendo i calcoli si ottiene

$$P^{-1}AP = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right),$$

coerentemente con quanto sopra affermato.



## Capitolo 5

# COMPORAMENTO ASINTOTICO. STABILITÀ

Negli esempi lineari bidimensionali studiati nel § 4.8 abbiamo notato la relazione fra l'origine (punto di equilibrio), il comportamento asintotico delle soluzioni per  $t \rightarrow \infty$  e il segno degli autovalori della matrice dei coefficienti. Mettiamo ora in evidenza la validità generale di questa relazione, e come la si possa applicare localmente nel caso non lineare. Esponiamo infine il metodo di Liapunov per lo studio della stabilità dei sistemi non lineari.

Nel primo paragrafo diamo le definizioni base dei concetti di stabilità nel caso generale dei sistemi autonomi non lineari.

### 5.1 STABILITÀ DEI PUNTI DI EQUILIBRIO

Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione localmente lipschitziana. Consideriamo l'equazione autonoma

$$x' = f(x). \quad (5.1)$$

Come visto nel paragrafo 2.6, la dinamica dell'equazione è individuata dal *flusso*  $\varphi$ , che per ogni punto  $x_0 \in \Omega$  dà la soluzione  $\varphi(\cdot, x_0)$  del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

intesa definita nel suo intervallo massimale di esistenza  $(\omega_-(x_0), \omega_+(x_0))$ .

Nel caso in cui  $f(x) = Ax$ , con  $A$  matrice  $n \times n$  a elementi reali, si ottiene un *flusso lineare*, dato da:

$$\varphi(t, x) = e^{tA}x.$$

Usualmente ci si riferisce con il termine di flusso anche alla funzione  $e^{tA}$ .

**OSSERVAZIONE 5.1.1** Nozioni come quella di stabilità, che esporremo fra poco, coinvolgono soltanto il flusso  $\varphi$  sopra definito e possono essere utilmente estese ad ogni situazione in cui sia data una funzione  $\varphi$  soddisfacente le proprietà della Proposizione 2.6.2, indipendentemente dal fatto che questa sia definita a partire da un'equazione differenziale. Da qui lo studio generale dei *sistemi dinamici*.

Sia  $\bar{x} \in \Omega$  un punto di *equilibrio* del flusso  $\varphi$ , cioè un punto per il quale  $f(\bar{x}) = 0$  (od anche, in termini del flusso,  $\varphi(\cdot, \bar{x}) = \bar{x}$ ). Nella definizione seguente prendiamo in considerazione il comportamento delle soluzioni per tempi  $t \geq 0$ .

DEFINIZIONE 5.1.2 *Nella ipotesi precedenti:*

- a) *il punto  $\bar{x}$  è detto punto di equilibrio stabile (secondo Liapunov) se per ogni intorno  $U$  di  $\bar{x}$  esiste un intorno  $V$  di  $\bar{x}$  per il quale, comunque preso  $x \in V \cap \Omega$ , si ha*

$$\omega_+(x) = +\infty, \quad e \quad \varphi(t, x) \in U \quad \text{per ogni } t \geq 0.$$

- b) *il punto  $\bar{x}$  è detto attrattivo se esiste un intorno  $V$  di  $\bar{x}$  tale che, per ogni  $x \in V \cap \Omega$*

$$\omega_+(x) = +\infty, \quad e \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x) = \bar{x}.$$

- c) *Il punto  $\bar{x}$  è detto asintoticamente stabile se è stabile e attrattivo.*

*Il punto  $\bar{x}$  si dice instabile se non è stabile.*

OSSERVAZIONE 5.1.3 La richiesta  $\omega_+(x) = +\infty$  può essere omessa in quanto, considerando un intorno  $U \subset \subset \Omega$ , la condizione che  $\varphi(t, x) \in U$  per ogni  $t \in [0, \omega_+(x))$  assicura che  $\omega_+(x) = +\infty$ .

OSSERVAZIONE 5.1.4 La stabilità e l'attrattività di un punto di equilibrio sono due concetti indipendenti. Il caso del centro in un sistema lineare bidimensionale è chiaramente un esempio di punto stabile, ma non attrattivo, ma è possibile costruire esempi di punti di equilibrio che sono attrattivi, ma non stabili (si veda, ad esempio, [2], § 15).

## 5.2 COMPORTAMENTO ASINTOTICO DEI SISTEMI LINEARI

Consideriamo un sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti:  $x' = Ax$ . L'origine è chiaramente un punto di equilibrio.

Introduciamo le seguenti definizioni<sup>25</sup>:

DEFINIZIONE 5.2.1 *Diremo che l'origine è un pozzo per l'equazione  $x' = Ax$  se comunque presa una soluzione  $x(\cdot)$  risulta;*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0.$$

*L'origine è invece detta sorgente se comunque presa una soluzione non nulla  $x(\cdot)$  risulta;*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = +\infty.$$

*Nel primo caso si dice anche che il corrispondente flusso lineare  $e^{tA}$  è una contrazione, mentre nel secondo caso si dice che è un'espansione.*

La natura dell'origine come punto di equilibrio dipende dal segno della parte reale degli autovalori di  $A$ :

TEOREMA 5.2.2 *L'origine è un pozzo (o una sorgente) per l'equazione  $x' = Ax$  se e solo se la parte reale di ogni autovalore della matrice  $A$  è negativa (o, rispettivamente, positiva).*

<sup>25</sup>il termine *pozzo* viene usualmente reso con *sink* in inglese



*Dimostrazione.* Supponiamo che  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  per ogni autovalore  $\lambda$ . Se  $x = (x_1, \dots, x_n)$  è una soluzione, sappiamo che ogni  $x_i$  è combinazione lineare di funzioni della forma

$$t^j e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad t^j e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad (5.2)$$

al variare di  $\alpha + i\beta$  fra gli autovalori di  $A$ . Allora  $x(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$  se ogni  $\alpha$  è negativo.

Invece, nell'ipotesi che  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  per ogni autovalore  $\lambda$ , si osservi che la matrice  $-A$  ha tutti gli autovalori con parte reale negativa, per cui

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{-tA} \xi| = 0 \quad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

L'arbitrarietà di  $\xi$  implica che  $\|e^{-tA}\| \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$  (infatti, se  $\xi$  è l' $i$ -esimo elemento della base canonica si ottiene l'annullarsi, al limite, della  $i$ -esima colonna della matrice  $e^{tA}$ ). Sia ora  $x(\cdot)$  una soluzione non nulla di  $x' = Ax$ ; esiste allora  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tale che  $x(t) = e^{tA} x_0$ . Quindi:

$$|x_0| = |e^{-tA} x(t)| \leq \|e^{-tA}\| |x(t)|.$$

Poiché  $\|e^{-tA}\| \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$  e  $x_0 \neq 0$ , deve essere  $|x(t)| \rightarrow +\infty$  per  $t \rightarrow +\infty$ .

Per il viceversa, sia  $v$  un autovettore di  $A$  relativo ad un autovalore  $\lambda = \alpha + i\beta$ . Allora  $x(t) = e^{\lambda t} v$  è soluzione di  $x' = Ax$  (in  $\mathbb{C}$ ). Poiché

$$|x(t)| = e^{\alpha t} |v|,$$

le soluzioni tendono a zero o all'infinito (in modulo) secondo che sia  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  o  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ , rispettivamente.  $\square$

Il passo successivo è analizzare i cosiddetti flussi iperbolici.

**DEFINIZIONE 5.2.3** Diciamo che il flusso  $e^{tA}$  è iperbolico se ogni autovalore di  $A$  ha parte reale non nulla.

Indichiamo con  $\lambda_1, \dots, \lambda_q \in \mathbb{C}$  gli autovalori distinti di  $A$ . Sappiamo che (vedi Teorema 4.8.15):

$$\mathbb{C}^n = E'(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E'(\lambda_q).$$

Se  $e^{tA}$  è iperbolico, suddividiamo gli autovalori distinguendoli rispetto al segno della parte reale:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_k < 0 & \quad k = 1, \dots, r \\ \operatorname{Re} \lambda_k > 0 & \quad k = r + 1, \dots, q \end{aligned}$$

(intenderemo che  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  per ogni  $\lambda$  se  $r = 0$  e che  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  per ogni  $\lambda$  se  $r = q$ ). Quindi

$$\mathbb{C}^n = E_s^{\mathbb{C}} \oplus E_u^{\mathbb{C}},$$

dove

$$E_s^{\mathbb{C}} = E'(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E'(\lambda_r), \quad E_u^{\mathbb{C}} = E'(\lambda_{r+1}) \oplus \dots \oplus E'(\lambda_q).$$

Poiché la matrice  $A$  è a elementi reali, esiste una base reale di  $E'(\mu) \oplus E'(\bar{\mu})$ , per ogni autovalore  $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ; possiamo quindi decomporre  $\mathbb{R}^n$  nella somma<sup>26</sup>

$$\mathbb{R}^n = E_s \oplus E_u, \quad \text{con } E_s = E_s^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^n \text{ e } E_u = E_u^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^n.$$

<sup>26</sup>si noti che le combinazioni lineari reali degli elementi di una base reale di  $E'(\mu) \oplus E'(\bar{\mu})$  formano un sottospazio di  $\mathbb{R}^n$  di dimensione  $2 \dim E'(\mu)$ .

Sappiamo che entrambi i sottospazi sono invarianti rispetto all'operatore  $T: x \mapsto Ax$  (vedi Proposizione 4.8.14) e quindi anche rispetto al flusso  $e^{tA}$  (basti ricordare la definizione di matrice esponenziale). Inoltre gli autovalori di  $T|_{E_s}$  sono  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  e quelli di  $T|_{E_u}$  sono  $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_q$ . Pertanto:

PROPOSIZIONE 5.2.4 *Lo spazio  $\mathbb{R}^n$  può essere decomposto nella forma:*

$$\mathbb{R}^n = E_s \oplus E_u$$

in modo che:

- ciascuno dei due sottospazi sia invariante rispetto ad  $A$  e quindi rispetto al flusso  $e^{tA}$ ;
- $e^{tA}|_{E_s}$  è una contrazione, mentre  $e^{tA}|_{E_u}$  è un'espansione.

Si può dimostrare che questa decomposizione è unica (vedi, ad esempio, [2]). I sottospazi  $E_s$  ed  $E_u$  sono anche detti *varietà stabile* e *varietà instabile*, rispettivamente.<sup>27</sup>

Notiamo che il cambiamento di variabile  $x = P\tilde{x}$  applicato nel § 4.4 per studiare la struttura delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo e autonomo utilizzava una matrice  $P$  costruita mediante autovettori generalizzati. Sia  $\tilde{E}_s \oplus \tilde{E}_u$  la decomposizione di  $\mathbb{R}^n$  relativa al sistema  $\tilde{x}' = \tilde{A}\tilde{x}$ , con  $\tilde{A} = P^{-1}AP$ : poiché  $\tilde{A}$  è diagonale a blocchi e ogni blocco presenta un solo autovalore,  $\tilde{E}_s$  e  $\tilde{E}_u$  sono sottospazi coordinati. I sottospazi  $E_s := P\tilde{E}_s$  e  $E_u := P\tilde{E}_u$  danno la parte stabile e instabile di  $\mathbb{R}^n$  relativamente al sistema  $x' = Ax$ .

ESEMPI

1.  $x' = Ax$  con  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

Gli autovalori sono  $\pm 3$  e

$$E_s = E(-3) = \langle (1, -1) \rangle, \quad E_u = E(3) = \langle (2, 1) \rangle.$$

Se  $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  allora nelle coordinate  $\tilde{x}$  date da  $x = P\tilde{x}$  il sistema si scrive equivalentemente in forma diagonale;

$$\begin{cases} \tilde{x}'_1 = 3\tilde{x}_1 \\ \tilde{x}'_2 = -3\tilde{x}_2. \end{cases}$$

Le traiettorie sono iperboli (vedi Figura 5.1).

2.  $x' = Ax$  con  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 3 & -1 & -4 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ .

La forma canonica reale è:

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

In Figura 5.2 sono riportate alcune traiettorie relative al sistema  $\tilde{x}' = \tilde{A}\tilde{x}$ .

Prendiamo ora in considerazione il caso in cui la matrice  $A$  possa presentare autovalori con parte reale nulla.

TEOREMA 5.2.5 *L'origine è stabile per l'equazione  $x' = Ax$  se e solo se valgono le due condizioni seguenti:*

<sup>27</sup>Gli indici  $s$  e  $u$  stanno per *stable* e *unstable*.

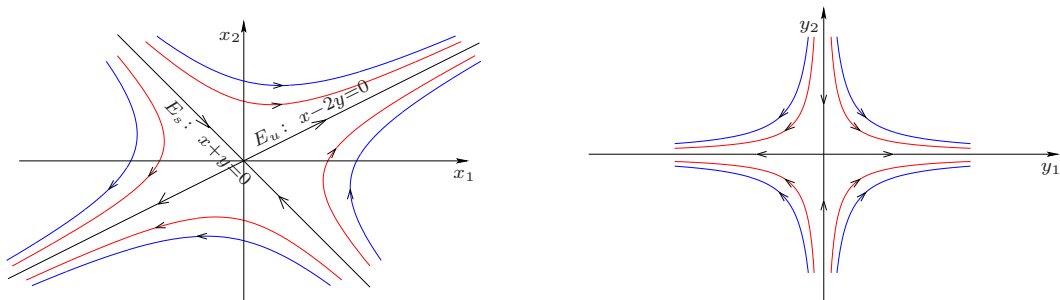


Figura 5.1 - Varietà stabile e instabile, nelle coordinate  $x$  e  $y$

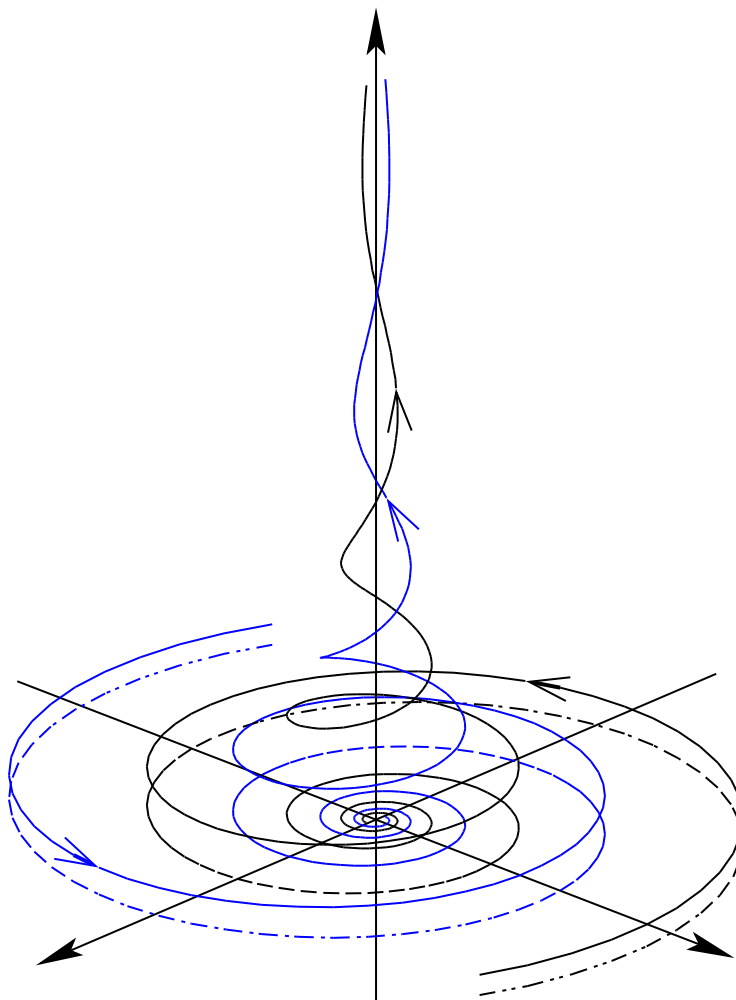


Figura 5.2 - Un esempio tridimensionale con  $\dim E_s = 2$  e  $\dim E_u = 1$

- a)  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$  per ogni autovalore  $\lambda$  di  $A$ ;  
 b) ogni autovalore  $\lambda$  con parte reale nulla deve essere semisemplice, cioè avere la molteplicità geometrica coincidente con quella algebrica.

In particolare, se esiste un autovalore con parte reale strettamente positiva, allora l'origine è instabile.

*Dimostrazione.* Come abbiamo visto nel capitolo precedente, mediante un opportuno cambiamento di variabile (e quindi di base in  $\mathbb{C}^n$ )  $x = P\tilde{x}$  si ottiene un sistema equivalente  $\tilde{x}' = \tilde{A}\tilde{x}$  in cui la matrice  $\tilde{A} = P^{-1}AP$  è diagonale a blocchi, con ciascun blocco  $\tilde{A}_k$  relativo alla rappresentazione della trasformazione  $x \mapsto Ax$  ristretta all'autospazio generalizzato  $E'(\lambda_k)$ . Il calcolo della matrice risolvente  $e^{t\tilde{A}}$  si riduce al calcolo di  $e^{t\tilde{A}_k}$ , in cui si sfrutta la decomposizione  $\tilde{A}_k = \lambda_k I + (\tilde{A}_k - \lambda_k I)$  in somma di una matrice diagonale e una matrice nilpotente. Quindi la parte polinomiale nella matrice risolvente è assente se e solo se la matrice  $\tilde{A}_k - \lambda_k I$  è nulla, cioè  $\tilde{A}_k$  è diagonale: ciò equivale a dire (Proposizione 4.8.10) che la molteplicità geometrica e algebrica di  $\lambda_k$  coincidono.

Pertanto, nelle ipotesi (a) e (b) si ottiene la limitatezza di  $\|e^{tA}\|$  su  $[0, +\infty)$ . Se teniamo conto che per ogni  $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$|e^{tA}x_0| \leq \|e^{tA}\| |x_0|,$$

è immediato dedurre la condizione di stabilità per l'origine.

Viceversa, se viene meno la validità di (a) o di (b), esiste  $x_0$  per il quale la soluzione  $e^{tA}x_0$  è illimitata. Ciò rimane vero per  $e^{tA}(\varepsilon x_0)$  per ogni  $\varepsilon > 0$ , da cui l'instabilità della soluzione nulla.  $\square$

### 5.3 STABILITÀ LINEARIZZATA

Cerchiamo ora di applicare quanto visto nel caso lineare allo studio locale delle soluzioni di un'equazione non lineare

$$x' = f(x) \tag{5.3}$$

nell'intorno di un suo punto  $\bar{x}$  di equilibrio. Sia pertanto  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$  e supponiamo che  $\bar{x} = 0$  (se così non fosse basta eseguire un'opportuna traslazione). A motivo della natura locale dell'indagine, consideriamo la linearizzazione del campo  $f$  attorno all'origine:

$$f(x) = Ax + o(|x|) \quad \text{per } x \rightarrow 0, \text{ con } A = Df(0).$$

Mostriamo che se tutti gli autovalori di  $A$  hanno parte reale negativa o tutti hanno parte reale positiva, allora il comportamento asintotico delle soluzioni attorno all'origine è come quello del sistema  $x' = Ax$ . A tal fine è utile una stima che 'quantifichi' l'andamento lineare del termine  $Ax$ , o, come nel lemma che segue, l'andamento quadratico del termine  $\langle Ax, x \rangle$ .

Data una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^n$ , utilizzeremo la notazione  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$  e  $|\cdot|_{\mathcal{B}}$  per indicare il prodotto scalare e la norma indotte da  $\mathcal{B}$ , quindi

$$\langle x', x'' \rangle_{\mathcal{B}} = \langle y', y'' \rangle, \quad |x|_{\mathcal{B}} = |y|$$

se  $y, y'$  e  $y''$  indicano le componenti di  $x, x'$  e  $x''$  in  $\mathcal{B}$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $|\cdot|$  l'usuale prodotto scalare e modulo in  $\mathbb{R}^n$ . Indichiamo con  $P = (p_{ij})$  la matrice di passaggio dalla base canonica a  $\mathcal{B}$  (quindi, secondo la (4.49), se  $v_1, \dots, v_n$  sono gli elementi di  $\mathcal{B}$ , risulta  $v_j = \sum_i p_{ij}e_i$ ). Allora:

$$\langle x', x'' \rangle_{\mathcal{B}} = \langle P^{-1}x', P^{-1}x'' \rangle, \quad |x|_{\mathcal{B}} = |P^{-1}x|.$$

LEMMA 5.3.1 Sia  $A \in M^{n \times n}(\mathbb{R})$ . Siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tali che

$$\alpha < \operatorname{Re} \lambda < \beta$$

per ogni autovalore  $\lambda$  di  $A$ . Allora esiste una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^n$  rispetto alla quale

$$\alpha|x|_{\mathcal{B}}^2 \leq \langle Ax, x \rangle_{\mathcal{B}} \leq \beta|x|_{\mathcal{B}}^2$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ .

La dimostrazione si basa sull'osservazione che, data una base  $\mathcal{B}$  e il corrispondente prodotto scalare definito come sopra, risulta:

$$\langle Ax, x \rangle_{\mathcal{B}} = \langle P^{-1}Ax, P^{-1}x \rangle = \langle P^{-1}APy, y \rangle = \langle \tilde{A}y, y \rangle,$$

dove  $\tilde{A} = P^{-1}AP$  è la matrice associata a  $x \mapsto Ax$  nella base  $\mathcal{B}$ ; quest'ultima viene scelta in modo che  $\tilde{A}$  abbia un'opportuna forma canonica.

*Dimostrazione.* Sappiamo che esiste una base  $\tilde{\mathcal{B}}$  di  $\mathbb{R}^n$  rispetto a cui l'operatore  $T: x \rightarrow Ax$  si rappresenta in forma canonica reale, cioè in forma diagonale a blocchi, con blocchi di una delle forme

$$a) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}); \quad b) \begin{pmatrix} D & I & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & D & I \\ & & & D \end{pmatrix},$$

con  $D = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda & \operatorname{Im} \lambda \\ -\operatorname{Im} \lambda & \operatorname{Re} \lambda \end{pmatrix}$ , nel caso di autovalore complesso. Ciascuno di questi blocchi rappresenta  $T$  ristretto a un opportuno sottospazio; possiamo così trattare separatamente ciascuno di questi sottospazi e supporre pertanto che la forma canonica  $\tilde{A}$  presenti *un unico* blocco, del tipo (a) o (b) sopra specificato.

Consideriamo il caso (a). Sia  $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{e}_j)$  una base in cui  $T$  si rappresenti mediante la matrice  $\tilde{A} = \lambda I + \tilde{A}_N$ , con  $\tilde{A}_N$  blocco nilpotente elementare. Dato  $\varepsilon > 0$  poniamo

$$v_j = \varepsilon^j \tilde{e}_j.$$

La matrice  $P$  di passaggio dalla base  $\tilde{\mathcal{B}}$  a  $\mathcal{B}$  è

$$P = \operatorname{diag}(\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n);$$

e l'operatore  $T$ , nella base  $\mathcal{B}$ , è rappresentato da

$$P^{-1}\tilde{A}P = \lambda I + P^{-1}\tilde{A}_N P.$$

Calcoliamo gli elementi della matrice  $N = P^{-1}\tilde{A}_N P$ :

$$\begin{aligned} (P^{-1}\tilde{A}_N P)_{ij} &= (P^{-1})_{ih}(\tilde{A}_N)_{hk}P_{kj} = (P^{-1})_{ii}(\tilde{A}_N)_{ij}P_{jj} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq i+1 \\ \varepsilon^{-i}\varepsilon^j = \varepsilon & \text{se } j = i+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & \varepsilon \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R});$$

Da ciò deduciamo che per ogni  $y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$|\langle Ny, y \rangle| \leq \varepsilon|y|^2.$$

Dato  $x \in \mathbb{R}^n$  e indicato con  $y$  il vettore delle sue componenti in  $\mathcal{B}$ , poiché in questa base  $T$  è rappresentato da  $\lambda I + N$ , risulta:

$$\langle Ax, x \rangle_{\mathcal{B}} = \langle (\lambda I + N)y, y \rangle = \lambda |y|^2 + \langle Ny, y \rangle;$$

possiamo concludere in base alla stima precedente e all'arbitrarietà di  $\varepsilon$ .

Il caso (b) si tratta analogamente.  $\square$

**TEOREMA 5.3.2 (STABILITÀ PER LINEARIZZAZIONE)** *Se ogni autovalore di  $Df(0)$  ha parte reale strettamente negativa, allora l'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile per l'equazione (5.3).*

*Più precisamente, se  $\Lambda > 0$  è un numero reale tale che*

$$\operatorname{Re} \lambda < -\Lambda \quad \text{per ogni autovalore } \lambda \text{ di } Df(0),$$

*allora esiste un intorno  $U$  dell'origine ed una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^n$  tali che, comunque preso  $x \in U$  la funzione  $\varphi(\cdot, x)$  è definita per ogni  $t \geq 0$  e*

$$|\varphi(t, x)|_{\mathcal{B}} \leq |x|_{\mathcal{B}} e^{-\Lambda t}$$

*per ogni  $t \geq 0$ .*

*Dimostrazione.* Applichiamo il lemma precedente alla linearizzazione di  $f$  attorno all'origine.

Sia  $\beta \in \mathbb{R}$  tale che

$$\operatorname{Re} \lambda < \beta < -\Lambda \quad \text{per ogni autovalore } \lambda \text{ di } A := Df(0).$$

Sia  $\mathcal{B}$  la base di  $\mathbb{R}^n$  fornita dal lemma precedente.

Dato  $x_0 \in \Omega \setminus \{0\}$  sia  $x(\cdot) = \varphi(\cdot, x_0)$ . Per ogni  $t$  dell'intervallo di definizione di  $x(\cdot)$  abbiamo

$$\frac{d}{dt} |x(t)|_{\mathcal{B}}^2 = 2 \langle x(t), x'(t) \rangle_{\mathcal{B}} = 2 \langle f(x(t)), x(t) \rangle_{\mathcal{B}} = 2 \langle Ax(t), x(t) \rangle_{\mathcal{B}} + o(|x(t)|_{\mathcal{B}}^2).$$

Sia  $\delta > 0$  tale che:

$$U := \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_{\mathcal{B}} < \delta\} \subset\subset \Omega,$$

$$\beta |x|_{\mathcal{B}}^2 + o(|x|_{\mathcal{B}}^2) \leq -\Lambda |x|_{\mathcal{B}}^2 \quad \text{per ogni } x \in U.$$

Sia  $x_0 \in U$  e  $\bar{t} \in [0, \omega_+(x_0))$  tale che  $x(t) \in U$  per ogni  $t \in [0, \bar{t}]$ . Allora, applicando il lemma precedente e tenendo conto della scelta di  $\delta$ , abbiamo:

$$\frac{d}{dt} |x(t)|_{\mathcal{B}}^2 \leq -2\Lambda |x|_{\mathcal{B}}^2 \quad \text{per ogni } t \in [0, \bar{t}].$$

Ne deduciamo che:

$$|x(t)|_{\mathcal{B}}^2 \leq |x_0|_{\mathcal{B}}^2 e^{-2\Lambda t} \quad \text{per ogni } t \in [0, \bar{t}].$$

e quindi  $|x(t)|_{\mathcal{B}} \leq |x_0|_{\mathcal{B}} e^{-\Lambda t}$  per ogni  $t \in [0, \bar{t}]$ . Pertanto la soluzione  $x(\cdot)$  non esce da  $U$  e pertanto  $\omega_+(x_0) = +\infty$  e la disuguaglianza precedente vale per ogni  $t \geq 0$ .  $\square$

Come nel caso lineare la presenza di un autovalore con parte reale positiva implica l'instabilità (omettiamo la dimostrazione):

**TEOREMA 5.3.3** *Se  $Df(0)$  ha un autovalore con parte reale strettamente positiva, allora l'origine è un punto di equilibrio instabile.*

ESEMPIO. (Pendolo smorzato) Ricordiamo l'equazione del pendolo semplice senza attrito (§ 1.6):

$$ml\ddot{\vartheta} = -mg \sin \vartheta;$$

consideriamo il caso in cui sia presente una forza di attrito proporzionale alla velocità  $l\dot{\vartheta}$ :

$$ml\ddot{\vartheta} = -mg \sin \vartheta - kl\dot{\vartheta}, \quad (k > 0),$$

o anche:

$$\ddot{\vartheta} + \omega^2 \sin \vartheta + 2a\dot{\vartheta} = 0.$$

con  $\omega^2 = g/l$  e  $2a = k/m$ . Scritta come sistema di equazioni questa diventa:

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 \sin \vartheta - 2av. \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono dati da  $(k\pi, 0)$  al variare di  $k \in \mathbb{Z}$ . Posto  $f(\vartheta, v) = (v, -\omega^2 \sin \vartheta - 2av)$ , risulta:

$$Df(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos k\pi & -2a \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono:

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - \omega^2 \cos k\pi} = \begin{cases} -a \pm \sqrt{a^2 - \omega^2} & \text{se } k \text{ è pari,} \\ -a \pm \sqrt{a^2 + \omega^2} & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Pertanto:

se  $k$  è pari  $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$  e i punti  $(k\pi, 0)$  risultano asintoticamente stabili: ricordando che  $v$  è la velocità angolare  $\dot{\vartheta}$ , si tratta delle configurazioni corrispondenti al punto di minima quota e velocità nulla.

se  $k$  è dispari vi è un autovalore negativo e uno positivo: i punti  $(k\pi, 0)$  sono instabili.

Le Figure 5.3 e 5.4 delineano il diagramma di fase nei due casi in cui il coefficiente di attrito  $a$  sia sopra o sotto il valore critico  $\omega$ .

ESEMPIO. L'esempio precedente, per  $a = 0$ , dà il pendolo privo di attrito. La linearizzazione attorno ai punti  $(k\pi, 0)$  con  $k$  dispari presenta i due autovalori  $\pm\omega$ : pertanto si tratta ancora di punti di equilibrio instabile (Figura 3.3).

I diagrammi di fase attorno ai punti  $((2k+1)\pi, 0)$  nel caso del pendolo senza attrito (vedi Figura 3.3), o quelli attorno ai punti  $(2k\pi, 0)$  per il pendolo con attrito (vedi Figure 5.3 e 5.4) hanno la stessa struttura dei corrispondenti diagrammi di fase relativi ai problemi linearizzati: nel primo caso il problema lineare presenta un punto di sella, nel secondo caso un fuoco o un nodo stabili a seconda che si tratti della situazione sottocritica o sovracritica. Questa *equivalenza topologica* locale è resa precisa dal seguente teorema.

**TEOREMA 5.3.4 (GROBMAN-HARTMAN)** *Se 0 è un punto di equilibrio per il sistema (5.3) e nessuno degli autovalori della matrice  $Df(0)$  ha parte reale nulla, allora il flusso relativo al sistema (5.3) e il flusso relativo al sistema linearizzato  $x' = Df(0)x$  sono localmente isocronalmente equivalenti, cioè esistono  $U$  e  $V$  intorno dell'origine e un omeomorfismo  $h: U \rightarrow V$  tali che*

$$h(\varphi(t, x)) = e^{tDf(0)}h(x) \quad \text{per ogni } x \in U.$$

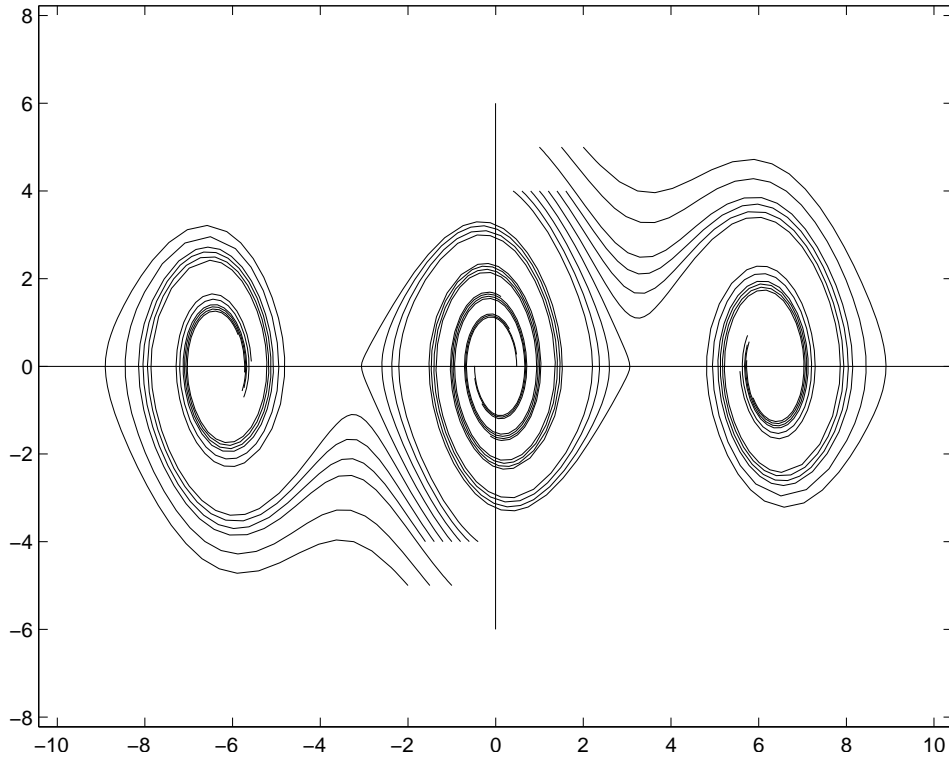


Figura 5.3 -  $a < \omega$  (pendolo sottosmorzato)



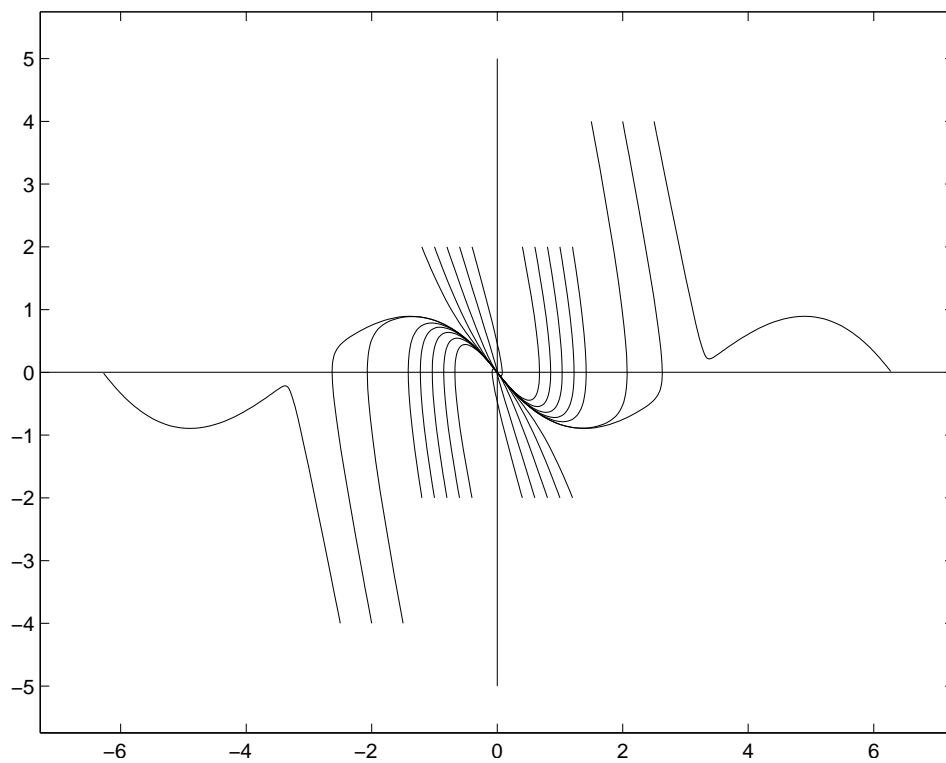


Figura 5.4 -  $a > \omega$  (pendolo sovrasmorzato)

~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~

In presenza di autovalori di cui si sappia soltanto la non positività o la non negatività della parte reale, nulla possiamo concludere sulla stabilità dell'origine come punto di equilibrio sfruttando solamente lo studio del sistema linearizzato. Consideriamo, ad esempio,

$$\begin{cases} x' = -y + x^3 \\ y' = x + y^3. \end{cases} \quad (5.4)$$

L'unico punto di equilibrio è l'origine, ma la linearizzazione nell'origine è data dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi l'origine è un centro per l'equazione linearizzata; mostriamo che invece è instabile per l'equazione data. Sia  $(x(\cdot), y(\cdot)) = \varphi(\cdot, (x_0, y_0))$  una soluzione; posto

$$\varrho(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2},$$

risulta:

$$\frac{d}{dt}\varrho^2(t) = 2[xx' + yy'] = 2[x(-y + x^3) + y(x + y^3)] = 2(x^4 + y^4);$$

poiché  $x^4 + y^4 \geq \frac{1}{2}\varrho^4$ , otteniamo

$$\frac{d}{dt}\varrho^2(t) \geq (\varrho^2)^2,$$

da cui  $\varrho^2(t) \rightarrow +\infty$  in tempo finito.

Se invece nella (5.4) i termini  $x^3$  e  $y^3$  vengono rimpiazzati da  $-x^3$  e  $-y^3$ , rispettivamente, allora l'equazione linearizzata non cambia, ma nelle stesse notazioni precedenti:

$$\frac{d}{dt}\varrho^2(t) = -2(x^4 + y^4),$$

da cui si ricava la decrescenza di  $\varrho$  e quindi l'esistenza globale della soluzione  $(x(\cdot), y(\cdot))$  e la sua convergenza a zero per  $t \rightarrow +\infty$ : l'origine è asintoticamente stabile.

Nel caso del pendolo senza attrito trattato poco sopra, i punti di equilibrio  $(k\pi, 0)$  con  $k$  pari danno un problema linearizzato con autovalori con parte reale nulla: vedremo nel prossimo paragrafo un modo per dimostrare la stabilità di tali punti.

## 5.4 FUNZIONI DI LIAPUNOV

Il metodo delle funzioni di Liapunov può essere visto come una generalizzazione del fatto fisico che i punti di equilibrio stabile corrispondono a punti di minimo dell'energia.

Consideriamo l'equazione (5.1), con  $f$  di classe  $C^1$ .

Se  $V: U \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione differenziabile ( $U \subseteq \Omega$  aperto), per ogni  $x \in U$  definiamo la *derivata orbitale* di  $V$  in  $x$ :

$$\dot{V}(x) = \left. \frac{d}{dt}V(\varphi(t, x)) \right|_{t=0},$$

dove  $\varphi$  indica il flusso associato all'equazione (5.1). Osserviamo che

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x), \quad (5.5)$$

quindi  $\dot{V}$  può essere calcolata senza conoscere  $\varphi$ , cioè senza risolvere l'equazione differenziale.

Notiamo anche che, fissato  $x \in U$  e  $t_0 \in (\omega_-(x), \omega_+(x))$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} V(\varphi(t, x)) \right|_{t=t_0} &= \nabla V(\varphi(t_0, x)) \cdot \varphi'(t_0, x) \\ &= \nabla V(\varphi(t_0, x)) \cdot f(\varphi(t_0, x)) = \dot{V}(\varphi(t_0, x)). \end{aligned}$$

Quindi in ogni punto  $\varphi(t, x)$  il valore  $\dot{V}(\varphi(t, x))$  rappresenta la derivata di  $V$  nel punto  $\varphi(t, x)$  lungo la soluzione  $\varphi(\cdot, x)$ . Ad esempio, se  $\dot{V} \leq 0$  allora  $V$  decresce lungo ogni soluzione.

**TEOREMA 5.4.1** *Sia  $\bar{x}$  un punto di equilibrio per l'equazione (5.1). Sia  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua definita in un intorno  $U \subseteq \Omega$  di  $\bar{x}$ , differenziabile in  $U \setminus \{\bar{x}\}$  e tale che:*

- a)  $V(\bar{x}) = 0$ ,  $V(x) > 0$  se  $x \neq \bar{x}$ ;
- b)  $\dot{V} \leq 0$  in  $U \setminus \{\bar{x}\}$ .

Allora il punto  $\bar{x}$  è stabile. Se inoltre

- c)  $\dot{V} < 0$  in  $U \setminus \{\bar{x}\}$ ,

allora il punto  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile.

Una funzione  $V$  soddisfacente (a) e (b) è detta *funzione di Liapunov* per  $\bar{x}$ ; se vale anche la proprietà (c) si parla di *funzione di Liapunov stretta*.

*Dimostrazione.* Sia  $\delta > 0$  tale che  $\overline{B_\delta(\bar{x})} \subseteq U$  e

$$\alpha = \min\{V(x) : x \in \partial B_\delta(\bar{x})\} > 0.$$

Sia

$$U_1 = \{x \in B_\delta(\bar{x}) : V(x) < \alpha\}.$$

Tale insieme è aperto e non vuoto (vi appartiene  $\bar{x}$ ). Per ogni  $x \in U_1$  si ha

$$\frac{d}{dt} V(\varphi(t, x)) = \dot{V}(\varphi(t, x)) \leq 0,$$

finché  $\varphi(t, x) \in U$ ; quindi  $V(\varphi(\cdot, x))$  è non crescente, per cui:

$$\varphi(t, x) \in U \subseteq B_\delta(\bar{x}) \quad \text{per ogni } t \in [0, \omega_+(x)).$$

Ne segue che  $\bar{x}$  è stabile. Notiamo che, in particolare,  $\omega_+(x) = +\infty$  (si ricordi l'Osservazione 5.1.3).

Supponiamo che valga anche la proprietà (c). Fissiamo  $x \in U_1$  e sia  $(t_n)_n$  una successione tendente a  $+\infty$ . Poiché  $(\varphi(t_n, x))_n$  è limitata ammette una sottosuccessione convergente (che per semplicità denotiamo sempre allo stesso modo):

$$\varphi(t_n, x) \rightarrow z.$$

Dimostriamo che  $z = \bar{x}$ . Poiché  $V$  è strettamente decrescente lungo  $\varphi(\cdot, x)$ , risulta:

$$V(\varphi(t, x)) > V(z) \quad \text{per ogni } t \geq 0 \tag{5.6}$$

(infatti  $V(\varphi(t_n, x)) > V(z)$  e per ogni  $t > 0$  esiste  $n$  tale che  $t_n < t$ ). Supponiamo che  $z \neq \bar{x}$ . Allora

$$V(z) > V(\varphi(s, z)) \quad \text{per ogni } s \geq 0.$$

Fissiamo  $S > 0$ ; per la dipendenza continua dai dati iniziali, per ogni  $\varepsilon > 0$  è possibile determinare  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tale che

$$|\varphi(S, \varphi(t_{n_\varepsilon}, x)) - \varphi(S, z)| < \varepsilon.$$

Poiché  $V(\varphi(S, z)) < V(z)$  e  $V$  è continua (nel punto  $\varphi(S, z)$ ), per  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo risulta:

$$V(\varphi(S, \varphi(t_{n_\varepsilon}, x))) < V(z).$$

Osserviamo ora che:

$$\varphi(S, \varphi(t_{n_\varepsilon}, x)) = \varphi(t_{n_\varepsilon} + S, x),$$

per cui

$$V(\varphi(t_{n_\varepsilon} + S, x)) < V(z);$$

ciò è assurdo per (5.6).

Per l'arbitrarietà della successione  $(t_n)$  concludiamo che  $\varphi(t, x) \rightarrow \bar{x}$  per  $t \rightarrow +\infty$ .  $\square$

ESEMPIO. Consideriamo l'equazione del moto di un punto materiale di massa  $m$  in un campo di forze conservativo di potenziale  $-\phi(x)$ :

$$m\ddot{x} = -\nabla\phi(x).$$

Equivalentemente possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{1}{m}\nabla\phi(x). \end{cases} \quad (5.7)$$

Se  $\bar{x}$  è punto di minimo per  $\phi$  allora  $(\bar{x}, 0)$  è punto di equilibrio per il sistema (5.7). Poniamo:

$$V(x, v) = \frac{1}{2}m|v|^2 + \phi(x) - \phi(\bar{x})$$

(si tratta dell'energia totale del sistema). Allora:

- $\dot{V}(x, v) = 0$ , come subito si verifica utilizzando la (5.5);
- se  $\bar{x}$  è punto di *minimo stretto* allora  $(\bar{x}, 0)$  è di equilibrio,  $V(\bar{x}, 0) = 0$  e

$$V(x, v) > 0 \quad \text{se } (x, v) \neq (\bar{x}, 0) \text{ è in un intorno di } (\bar{x}, 0).$$

Pertanto la funzione  $V$  è di Liapunov per  $(\bar{x}, 0)$ , che quindi è stabile.

*Sistemi hamiltoniani.* L'esempio precedente rientra nell'importante categoria dei *sistemi hamiltoniani*. Si tratta di sistemi di equazioni differenziali della forma

$$\begin{cases} \dot{q} = H_p(q, p) \\ \dot{p} = -H_q(q, p), \end{cases} \quad (5.8)$$

dove  $H(p, q)$  è una funzione differenziabile in  $2n$  variabili ( $p \in \mathbb{R}^n, q \in \mathbb{R}^n$ ). Come subito si verifica,  $H$  è un *integrale primo* del sistema (5.8), cioè è costante lungo le soluzioni; infatti:

$$\frac{d}{dt}H(q(t), p(t)) = H_q(q(t), p(t))\dot{q}(t) + H_p(q(t), p(t))\dot{p}(t) \equiv 0.$$

Ciò significa che la derivata orbitale di  $H$  è nulla.

Sia ora  $(\bar{q}, \bar{p})$  un punto di *minimo stretto* per  $H$ ; allora  $(\bar{q}, \bar{p})$  è critico, quindi è un punto di equilibrio per il sistema (5.8); inoltre

$$V(q, p) := H(q, p) - H(\bar{q}, \bar{p})$$

è una funzione di Liapunov per  $(\bar{q}, \bar{p})$ . Concludiamo che  $(\bar{q}, \bar{p})$  è di equilibrio stabile. Notiamo che l'essere  $H$  costante lungo le soluzioni esclude l'asintotica stabilità.

Il caso precedente corrisponde alla scelta

$$H(x, v) = \frac{1}{2}|v|^2 + \frac{1}{m}\phi(x)$$

(la funzione  $V$  dell'esempio precedente è  $mH$ ).

**ESEMPIO.** Lo studio del moto di un pendolo di lunghezza  $l$  senza attrito conduce all'equazione:

$$\ddot{\vartheta} + \omega^2 \sin \vartheta = 0 \quad (\omega^2 = \frac{g}{l}),$$

cioè al sistema del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = v \\ \dot{v} = -\omega^2 \sin \vartheta \end{cases}$$

(si veda il § 3.7 per lo studio delle orbite, in particolare la Figura 3.3). La funzione

$$H(\vartheta, v) = \frac{1}{2}|v|^2 - \omega^2 \cos \vartheta$$

è una funzione di Liapunov per i punti di equilibrio  $(k\pi, 0)$ , con  $k$  intero pari: pertanto si tratta di punti di equilibrio stabile. Come già sopra notato, non è possibile applicare il metodo di linearizzazione in quanto gli autovalori hanno parte reale nulla.

*Sistemi gradiente.* Si tratta di sistemi della forma

$$x' = -\nabla V(x) \tag{5.9}$$

con  $V \in C^2(\Omega)$ ; quindi il campo di velocità è un campo gradiente. Sia  $\bar{x}$  un punto di *minimo stretto* per  $V$ ; per semplicità supponiamo che  $V(\bar{x}) = 0$ . Allora

$$V > 0 \quad \text{in un intorno di } \bar{x}.$$

Inoltre

$$\dot{V}(x) = -|\nabla V(x)|^2 \leq 0.$$

Quindi  $V$  è una funzione di Liapunov per  $\bar{x}$ , che pertanto è di equilibrio stabile. Se in più  $\bar{x}$  è anche isolato come punto critico, allora  $V$  è una funzione di Liapunov stretta e  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile.

**OSSERVAZIONE 5.4.2** Nello studio della stabilità degli equilibri per sistemi bidimensionali è utile tenere presente i metodi del § 3.7 per la determinazione delle traiettorie.

~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~ . ~

Concludiamo con un risultato di asintotica stabilità che dà una stima del cosiddetto *bacino di attrazione* di un punto di equilibrio asintoticamente stabile  $\bar{x}$ , cioè l'insieme dei punti  $x$  per i quali  $\varphi(t, x) \rightarrow \bar{x}$  per  $t \rightarrow +\infty$ . È conveniente premettere alcuni concetti (che si inquadrerebbero in modo naturale nel più vasto quadro dei sistemi dinamici).

**DEFINIZIONE 5.4.3** Sia  $\varphi$  il flusso associato all'equazione (5.1). Sia  $x \in \Omega$ .

Poniamo:

$$\begin{aligned}\gamma^+(x) &= \{\varphi(t, x) : t \in [0, \omega_+(x))\} && \text{semiorbita positiva di } x \\ \gamma^-(x) &= \{\varphi(t, x) : t \in (\omega_-(x), 0]\} && \text{semiorbita negativa di } x \\ \gamma(x) &= \{\varphi(t, x) : t \in (\omega_-(x), \omega_+(x))\} && \text{orbita di } x.\end{aligned}$$

Se  $\omega_+(x) = +\infty$ , si dice  $\omega$ -limite di  $x$  l'insieme

$$\omega(x) = \bigcap_{t>0} \overline{\gamma^+(\varphi(t, x))} = \bigcap_{t>0} \overline{\{\varphi(s, x) : s \geq t\}}.$$

In modo analogo si definisce l' $\alpha$ -limite di  $x$ .

Diremo poi che un insieme è *positivamente* [negativamente] *invariante* se contiene la semiorbita positiva [negativa] di ogni suo punto. Si parla invece di insieme *invariante* se è sia positivamente che negativamente invariante, cioè contiene l'orbita di ogni suo punto.

Enunciamo senza dimostrazione la seguente proprietà:

PROPOSIZIONE 5.4.4 *L'insieme  $\omega(x)$  è invariante, cioè contiene l'orbita di ogni suo punto.*

Utilizzando questo risultato è facile dimostrare:

TEOREMA 5.4.5 *Sia  $\bar{x} \in \Omega$  un punto di equilibrio per l'equazione (5.1) e sia  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di Liapunov per  $\bar{x}$ . Sia  $A$  un intorno chiuso e limitato di  $\bar{x}$  che sia positivamente invariante e tale che su nessuna orbita in  $A \setminus \{\bar{x}\}$  la funzione  $V$  sia costante. Allora  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile e  $A$  è contenuto nel bacino d'attrazione di  $\bar{x}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $x \in A$ ; poiché  $A$  è positivamente invariante e chiuso

$$\omega(x) \subseteq \overline{\gamma^+(x)} \subseteq A.$$

Poiché  $V$  decresce lungo le orbite,

$$V(\varphi(t, x)) \rightarrow \alpha := \inf\{V(\varphi(\tau, x)) : \tau \geq 0\}.$$

I punti di  $\omega(x)$  sono limite di successioni  $(\varphi(t_k, x))_k$  (con  $t_k \rightarrow +\infty$ ) e  $V$  è continua; quindi  $V = \alpha$  su  $\omega(x)$ . Per ipotesi  $\omega(x)$ , in quanto sottoinsieme di  $A$ , non contiene orbite su cui  $V$  è costante, se non l'orbita  $\{\bar{x}\}$ . Deve allora essere  $\omega(x) = \{\bar{x}\}$ , da cui si deduce che  $\varphi(t, x) \rightarrow \bar{x}$  per  $t \rightarrow +\infty$ .  $\square$

## Capitolo 6

# EQUAZIONI DELLA FISICA MATEMATICA: PROBLEMI AI LIMITI E FUNZIONI SPECIALI

La modellizzazione dei fenomeni fisici mediante equazioni differenziali dà luogo sovente a equazioni del secondo ordine: si pensi, ad esempio, ai problemi incentrati sulla seconda legge della dinamica, nella quale il termine di accelerazione si esprime tramite le derivate seconde della funzione della posizione. Poichè la prima fase di approssimazione nel tradurre matematicamente un fenomeno passa in genere attraverso un'operazione di linearizzazione, le equazioni differenziali del *secondo ordine e lineari*, sia ordinarie che a derivate parziali, svolgono un ruolo rilevante in una molteplicità di modelli. Da essi scaturisce poi la maggior parte delle tipologie di problemi: ne sono esempio i problemi ai valori iniziali, come si incontrano nella determinazione della legge oraria di un moto nota la posizione e la velocità iniziale. Un'altra rilevante tipologia di problemi per un'equazione del secondo ordine è quella in cui la prescrizione del valore iniziale dell'incognita e della sua derivata vengono sostituiti dall'assegnazione del valore dell'incognita agli estremi di un fissato intervallo: si tratta dei cosiddetti *problemi ai limiti*, collegati all'importante questione della determinazione degli *autovalori* degli operatori differenziali e della ricerca delle corrispondenti *autofunzioni*.

In questo capitolo accenniamo ad alcune di tali questioni connesse allo studio di equazioni fondamentali della Fisica Matematica. Il § 6.1 presenta un esempio standard di problema ai limiti come scaturisce dalla risoluzione dell'equazione di Laplace su un rettangolo mediante separazione di variabili. I §§ 6.2 e 6.3 trattano l'*equazione di Hermite* e l'*equazione di Bessel* (di ordine 0), come esempi di equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti variabili, introducendo il metodo di risoluzione mediante sviluppi in *serie di potenze*. Infatti, ad eccezione di alcuni casi particolari, non è possibile esprimere le soluzioni delle equazioni a coefficienti variabili mediante combinazioni finite di funzioni elementari. Soluzioni particolari (usualmente espresse come sviluppi in serie) di equazioni come quelle di Hermite o di Bessel danno luogo a *funzioni speciali* della Fisica Matematica di ampio utilizzo nei problemi modellistici e quindi diffusamente studiate di per sè.

Nei §§ 6.4 e 6.5 per ciascuna delle due equazioni introdotte illustriamo un problema in cui essa si presenta in modo naturale. I contesti scelti sono la modellizzazione dell'oscillatore armonico quantistico (già incontrato nel § 1.7) e dei modi normali di vibrazione di una membrana circolare elastica. Entrambi coinvolgono lo studio di problemi ai limiti e problemi agli autovalori per equazioni lineari del secondo ordine.

## 6.1 EQUAZIONE DI LAPLACE SU DI UN RETTANGOLO

Una delle equazioni a derivate parziali più note è l'equazione di Laplace:

$$\Delta u(x, y) = 0 \quad \left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (6.1)$$

in un assegnato aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^2$ . Ad esempio, il potenziale  $u$  in una regione piana  $\Omega$ , in assenza di carica elettrica interna, soddisfa l'equazione (6.1). Un problema che si presenta in modo naturale per la (6.1) è il seguente

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = u_0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (6.2)$$

Si tratta della ricerca di quelle particolari soluzioni di (6.1) che assumono l'assegnato valore  $u_0$  su  $\partial\Omega$ : si pensi, ad esempio, all'interpretazione di  $u$  come potenziale.

L'operatore  $\Delta$  è lineare ( $\Delta(\alpha u + \beta v) = \alpha \Delta u + \beta \Delta v$ ), per cui l'insieme  $V$  delle soluzioni di (6.1) è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per scalari. È possibile individuare una base di  $V$ ? Non affronteremo qui il problema nella sua generalità; individueremo invece alcune soluzioni 'elementari' a partire dalle quali cercheremo di rappresentare la soluzione del problema (6.2) per domini  $\Omega$  rettangolari.

Sia pertanto  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  e riscriviamo il problema nella forma

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \text{in } \Omega \\ u(x, 0) = u_0^1(x), \quad u(1, y) = u_0^2(y) \\ u(x, 1) = u_0^3(x) \quad u(0, y) = u_0^4(y) \end{cases} \quad (6.3)$$

con  $u_0^i$  restrizione, al corrispondente lato di  $\Omega$ , della funzione (continua)  $u_0$ . Poiché  $\Delta$  è lineare, possiamo risolvere separatamente ciascuno dei problemi ottenuti ponendo uguali a zero i dati  $u_0^i$  su tre dei quattro lati e sommare infine le quattro funzioni così ottenute. Ad esempio, prendiamo in considerazione il problema

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0 & \text{in } \Omega \\ u(x, 0) = f(x), \\ u(1, y) = u(x, 1) = u(0, y) = 0 \end{cases} \quad (6.4)$$

con  $f = u_0^1$ . Determiniamo innanzitutto soluzioni della forma 'a variabili separate'

$$u(x, y) = v(x)w(y)$$

dell'equazione  $\Delta u = 0$  soddisfacenti le prescritte condizioni di annullamento sui tre lati. Deve essere

$$v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0;$$

questa è implicata da:

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)}.$$

Poiché i due membri dipendono da variabili differenti, devono essere costanti, diciamo  $-\lambda$ ; da ciò e dalle condizioni di annullamento arriviamo ad imporre a  $v$  e  $w$  di risolvere<sup>28</sup>

$$\begin{cases} v''(x) + \lambda v(x) = 0 \\ v(0) = 0 = v(1) \end{cases} \quad (6.5) \qquad \begin{cases} w''(y) - \lambda w(y) = 0 \\ w(1) = 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

<sup>28</sup>Se  $v''(x) + \lambda v(x) = 0$  e  $w''(y) - \lambda w(y) = 0$  allora  $v''(x)w(y) + \lambda v(x)w(y) = 0$  e  $v(x)w''(y) - \lambda v(x)w(y) = 0$ , per cui, sommando membro a membro, si ha  $v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0$ .



Il problema (6.5) è un *problema ai limiti* per l'equazione  $v'' + \lambda v = 0$ . Sicuramente ammette la soluzione nulla, ma per gli scopi che ci siamo prefissati dobbiamo vedere se è possibile determinare  $\lambda$  in modo che esistano soluzioni non identicamente nulle. Dobbiamo distinguere tre casi:

a)  $\lambda = -a^2 < 0$  (con  $a > 0$ )

In tal caso le soluzioni sono date da:

$$v(x) = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

La condizione di annullamento agli estremi di  $(0, 1)$  dà  $c_1 = c_2 = 0$ , come si vede facilmente.

b)  $\lambda = 0$

Le soluzioni sono affini:  $v(x) = c_1 + c_2 x$ ; chiaramente solo la funzione nulla assume valore zero nei punti  $x = 0$  e  $x = 1$ .

c)  $\lambda = a^2$  (con  $a > 0$ )

Le soluzioni hanno la forma

$$v(x) = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Se richiediamo che  $v$  si annulli negli estremi di  $(0, 1)$ , allora  $c_1 = 0$  e  $c_2 \sin a = 0$ . Otteniamo allora soluzioni diverse da quella nulla in corrispondenza dei valori  $a = \pm n\pi$  per  $n \in \mathbb{N}$ .

Pertanto, esistono infiniti valori

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

per i quali il problema (6.5) ha soluzioni non nulle, date, a meno di una costante moltiplicativa, da

$$v_n(x) = \sin n\pi x.$$

I valori  $\lambda_n$  sono detti *autovalori* del problema (6.5), e le funzioni  $v_n$  sono le corrispondenti *autofunzioni*.

Poniamo ora  $\lambda = \lambda_n$  nella (6.6); otteniamo:

$$w(y) = c_1 e^{n\pi y} + c_2 e^{-n\pi y}$$

con la condizione

$$c_1 e^{n\pi} + c_2 e^{-n\pi} = 0,$$

da cui si ricava facilmente che  $w$  differisce per una costante moltiplicativa dalla funzione

$$w_n = \sinh n\pi(1 - y).$$

Riassumendo, le funzioni

$$u_n(x, y) = v_n(x)w_n(y) = \sin n\pi x \sinh n\pi(1 - y) \quad (n \in \mathbb{N})$$

risolvono l'equazione  $\Delta u = 0$  e soddisfano le condizioni

$$u(1, y) = u(x, 1) = u(0, y) = 0.$$

Cerchiamo ora di soddisfare anche la condizione  $u(x, 0) = f(x)$  mediante una combinazione lineare 'infinita' di funzioni  $u_n$ , cioè una serie

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x \sinh n\pi(1 - y). \quad (6.7)$$

Deve essere ( $y = 0$ )

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$$

con  $b_n = c_n \sinh n\pi$ . Allora la successione  $(b_n)$  deve coincidere con la successione dei coefficienti dello sviluppo di  $f$  in serie di Fourier di soli seni. Notiamo espressamente che si tratta dello sviluppo di  $f$  in serie di autofunzioni del problema (6.5).

È possibile verificare che la funzione così ottenuta, sommata a quelle ricavate a partire dai problemi analoghi a (6.4), risolve effettivamente il problema (6.3): la funzione è  $C^2$  e verifica l'equazione  $\Delta u = 0$  in  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  ed è estendibile con continuità a  $\partial\Omega$  in modo da assumere il valore  $u_0$ : ci limitiamo qui a verificare la prima di queste condizioni (mentre più delicato è dimostrare l'estendibilità continua sul bordo con valore  $u_0$ ). A tal fine è sufficiente considerare la  $u$  in (6.7).

Dalla teoria delle serie di Fourier segue che

$$b_n = \int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx.$$

Nell'ipotesi di continuità, e quindi di limitatezza, di  $f$  la successione  $(b_n)$  è equilimitata; inoltre

$$\begin{aligned} \frac{\sinh n\pi(1-y)}{\sinh n\pi} &= e^{-n\pi y} \frac{1 - e^{-2n\pi(1-y)}}{1 - e^{-2n\pi}} \\ &\leq e^{-n\pi y} \frac{1}{1 - e^{-2\pi}}. \end{aligned}$$

Pertanto esiste  $C > 0$  per il quale il termine generale della serie (6.7) è maggiorato, in valore assoluto, da:

$$C(e^{-\pi y})^n.$$

Ne segue che la serie (6.7) converge assolutamente in modo uniforme in ogni insieme

$$[0, 1] \times [y_0, 1] \quad \text{con } y_0 > 0.$$

Con ragionamento analogo si vede che le serie derivate, prime e seconde, sono dominate da  $\sum n^2(e^{-\pi y})^n$ , a meno di una costante positiva. Quindi le derivate di  $u$  uguagliano le corrispondenti serie derivate, da cui  $\Delta u = 0$ . (Si veda, ad esempio, [17]).

## 6.2 EQUAZIONE DI HERMITE

Come avremo modo di vedere nel successivo §6.4, lo studio dell'oscillatore armonico quantistico porta alla considerazione della seguente equazione, detta *equazione di Hermite*

$$u''(x) - 2xu'(x) + 2\gamma u(x) = 0, \tag{6.8}$$

dove  $\gamma$  è una data costante reale.

Cerchiamo di determinare le soluzioni che possono essere sviluppate in serie di potenze della forma:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

con raggio di convergenza  $R > 0$ . Se  $|x| < R$  possiamo considerare le serie derivate:

$$u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \text{quindi} \quad xu'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$$

e

$$u''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n.$$

La condizione che  $u$  risolva l'equazione si traduce pertanto nella seguente relazione fra i coefficienti  $a_n$  dello sviluppo:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + 2\gamma a_n = 0,$$

cioè

$$a_{n+2} = 2 \frac{n-\gamma}{(n+2)(n+1)} a_n, \quad \text{per ogni } n \geq 0. \quad (6.9)$$

I valori  $a_0$  e  $a_1$  possono essere assegnati arbitrariamente, mentre i coefficienti successivi risultano determinati per ricorrenza dalla (6.9).

La scelta  $a_0 = 1$  e  $a_1 = 0$  dà  $a_{2k+1} = 0$  per ogni  $k$ , mentre

$$a_{2(k+1)} = 2 \frac{2k-\gamma}{(2k+2)(2k+1)} a_{2k},$$

da cui, per iterazione,

$$a_{2(k+1)} = 2^{k+1} \frac{(2k-\gamma)(2k-2-\gamma)\dots(-\gamma)}{(2k+2)!}.$$

Mediante il criterio del rapporto è immediato verificare che la serie  $\sum_k a_{2k} x^{2k}$  converge assolutamente per ogni  $x$ ; pertanto definisce una funzione analitica  $u_1$  su tutto  $\mathbb{R}$  la quale, in base a quanto svolto, risolve l'equazione (6.8).

Analogamente, se poniamo  $a_0 = 0$  e  $a_1 = 1$  otteniamo  $a_{2k} = 0$  per ogni  $k$ , mentre

$$a_{(2k+1)+2} = 2^{k+1} \frac{(2k+1-\gamma)(2k-1-\gamma)\dots(1-\gamma)}{(2k+3)!}.$$

La corrispondente serie è ancora assolutamente convergente su tutto  $\mathbb{R}$ , per cui dà luogo ad una funzione analitica  $u_1$  che risolve (6.8) su tutto  $\mathbb{R}$ .

Osserviamo che il determinante wronskiano di  $u_1$  e  $u_2$  per  $t = 0$  è

$$w(0) = \begin{vmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1'(0) & u_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Pertanto  $u_1$  e  $u_2$  sono soluzioni linearmente indipendenti e le soluzioni di (6.8) sono date da:

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t),$$

al variare di  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

**OSSERVAZIONE 6.2.1** Nel caso in cui  $\gamma$  è un intero naturale pari, la serie che definisce  $u_1$  è in realtà una somma finita, quindi  $u_1$  è un polinomio, di grado  $\gamma$ . Così pure, se  $\gamma$  è un intero naturale dispari, allora la funzione  $u_2$  è un polinomio, di grado  $\gamma$ . In tutti gli altri casi le funzioni  $u_1$  e  $u_2$  sono serie effettive, che definiscono una funzione pari e una funzione dispari, rispettivamente; quindi se  $\gamma \notin \mathbb{N}$  nessuna delle soluzioni  $c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$  è polinomiale. Vedremo l'importanza di questa osservazione nel § 6.4.

### 6.3 EQUAZIONE DI BESSEL

Analizziamo ora un'importante equazione differenziale del secondo ordine che nasce in connessione all'operatore di Laplace in coordinate polari nel piano (come vedremo, a titolo d'esempio, nel problema presentato nel prossimo paragrafo).

Per  $t \neq 0$  consideriamo l'equazione:

$$u'' + \frac{1}{t}u' + u = 0, \quad (6.10)$$

detta *equazione di Bessel* di ordine 0.

Cerchiamo una soluzione in forma di serie di potenze:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

con raggio di convergenza  $R$  positivo. Per ogni  $t$  interno al cerchio di convergenza abbiamo

$$u'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}, \quad u''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} u''(t) + \frac{1}{t}u'(t) + u(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}t^n \\ &\quad + \frac{a_1}{t} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)a_{n+2}t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \\ &= \frac{a_1}{t} + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)^2 a_{n+2} + a_n] t^n; \end{aligned}$$

ne segue che la condizione che  $u$  risolve (6.10) diventa:

$$a_1 = 0, \quad a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)^2} a_n.$$

Tutti i termini di indice dispari sono pertanto nulli, mentre

$$a_{2(k+1)} = -\frac{1}{[2(k+1)]^2} a_{2k}, \quad \text{per ogni } k \geq 0.$$

Da ciò deduciamo che

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k} (k!)^2} a_0.$$

Se assumiamo  $a_0 = 1$  otteniamo come funzione  $u$  la cosiddetta *funzione di Bessel (del primo tipo) di ordine 0*:

$$J_0(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (t/2)^{2k}}{(k!)^2} = 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2 4^2} + \dots$$

Osserviamo che il raggio di convergenza è  $+\infty$  e la funzione è pari.

Sappiamo che lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione (6.10) è bidimensionale; individuiamo una seconda soluzione che sia indipendente rispetto a  $J_0$ . Nello spirito del metodo di variazione delle costanti cerchiamo una soluzione della forma

$$u(t) = v(t)J_0(t), \quad (t > 0)$$

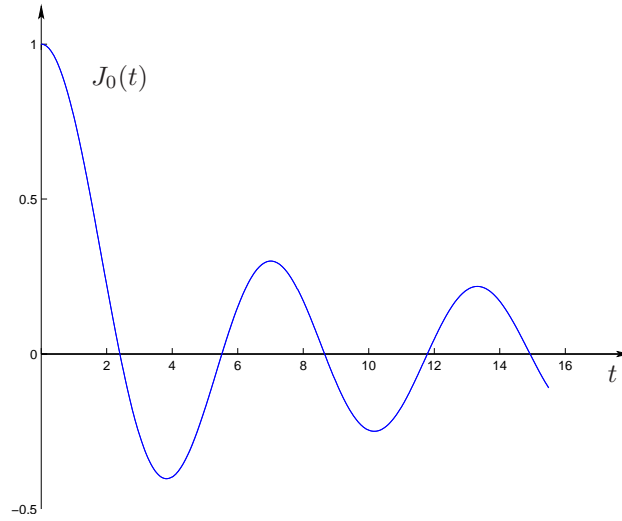


Figura 6.1 - Funzione  $J_0$  di Bessel

con  $v$  da determinare. Deve essere:

$$v''J_0 + 2v'J_0' + vJ_0'' + \frac{1}{t}(v'J_0 + vJ_0') + vJ_0 = 0,$$

da cui, tenendo conto che  $J_0$  è soluzione dell'equazione,

$$v'' + \left(2\frac{J_0'}{J_0} + \frac{1}{t}\right)v' = 0,$$

in ogni intervallo in cui  $J_0 \neq 0$ . Come equazione in  $v'$  questa dà subito

$$v'(t) = c \frac{1}{tJ_0^2(t)} \quad (c \text{ costante}),$$

quindi:

$$v(t) = c \int \frac{1}{tJ_0^2(t)} dt.$$

Si può verificare che, a meno di un addendo multiplo di  $J_0$ , risulta:

$$\begin{aligned} J_0(t) \int \frac{1}{tJ_0^2(t)} dt &= J_0(t) \log t + \frac{t^2}{2^2} \\ &\quad - \frac{t^4}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{t^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \dots \end{aligned}$$

Si può dimostrare che la serie che segue il termine  $J_0(t) \log t$  converge assolutamente per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . La funzione  $u_0$  a secondo membro costituisce pertanto un'estensione di  $v$  a tutto  $(0, +\infty)$ , quindi anche nei punti di annullamento di  $J_0$ . Concludiamo che le soluzioni dell'equazione (6.10) sono date da:

$$u(t) = c_1 J_0(t) + c_2 u_0(t),$$

al variare di  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . In realtà, per coerenza con definizioni alternative, si preferisce utilizzare anzichè  $u_0$  la funzione

$$Y_0(t) := -\frac{2}{\pi}(\log 2 - \gamma)J_0(t) + \frac{2}{\pi}u_0,$$

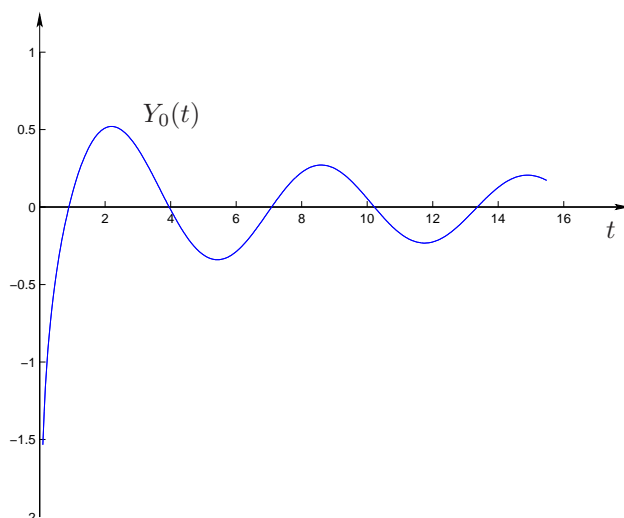


Figura 6.2 - Funzione  $Y_0$  di Neumann-Bessel

dove  $\gamma$  indica la costante di Eulero-Mascheroni:

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right) \sim 0.5772\dots$$

La funzione  $Y_0$  è detta *funzione di Neumann-Bessel del secondo tipo, di ordine 0*. Il grafico è indicato in Figura 6.2; notiamo che, dalla definizione stessa si ricava la singolarità di tipo logaritmico per  $t_0$ :  $Y_0(t)/\log t \rightarrow 1$  per  $t \rightarrow 0^+$ .

## 6.4 OSCILLATORE ARMONICO QUANTISTICO

Riprendiamo l'equazione di Schrödinger degli stati stazionari nel caso di potenziale armonico (vedi § 1.7): riscaldando opportunamente la variabile spaziale otteniamo l'equazione (1.30), cioè

$$v''(x) + ((2\gamma + 1) - x^2)v(x) = 0, \quad (6.11)$$

dove abbiamo nuovamente utilizzato la variabile  $x$  e, per comodità di notazione in vista delle successive trasformazioni, abbiamo indicato con  $2\gamma + 1$  la costante  $\varepsilon$ ; risulta pertanto:

$$2\gamma + 1 = 2 \left( \frac{mK}{\hbar^2} \right)^{1/2} \frac{E}{K} = 2 \frac{E}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{K}}.$$

Le soluzioni di interesse fisico (funzioni d'onda) devono soddisfare la condizione

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} v(x) = 0.$$

Considerazioni euristiche<sup>29</sup> suggeriscono di operare il cambiamento di variabile

$$v(x) = u(x)e^{-x^2/2}.$$

<sup>29</sup>Per valori grandi di  $|x|$  possiamo trascurare il termine  $\gamma$  del coefficiente di  $v(x)$  nella (6.11), ottenendo

$$v''(x) = x^2 v(x).$$

L'equazione si trasforma così nell'equazione di Hermite

$$u''(x) - 2xu'(x) + 2\gamma u(x) = 0.$$

Pertanto, cerchiamo soluzioni  $u(x)$  dell'equazione di Hermite per le quali

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u(x)e^{-x^2/2} = 0. \quad (6.12)$$

Come visto nell'Osservazione 6.2.1, le uniche soluzioni polinomiali si ottengono se  $\gamma$  è un intero naturale. Queste soddisfano banalmente la condizione (6.12). Si può dimostrare che si tratta delle uniche soluzioni con tale proprietà. Per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si conviene di indicare con  $H_n(x)$  l'unico polinomio di grado  $n$  che risolve l'equazione (6.8) per  $\gamma = n$  e che ha il coefficiente del termine di grado massimo dato da  $2^n$ . Si tratta dei cosiddetti *polinomi di Hermite*. Risulta, ad esempio,

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = -2 + 4x^2, \quad H_3(x) = -12x + 8x^3, \dots$$

Se ricordiamo il significato attribuito a  $\gamma$ , la condizione (6.12) di ammissibilità delle soluzioni dell'equazione di Hermite e quindi di ammissibilità per le corrispondenti soluzioni dell'equazione di Schrödinger, si traduce nel richiedere l'esistenza di un numero naturale  $n$  tale che

$$2n + 1 = 2 \left( \frac{mK}{\hbar^2} \right)^{1/2} \frac{E}{K} = 2 \frac{E}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{K}},$$

cioè

$$E = \left( n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{K}{m}} \hbar.$$

Ricordiamo l'equazione classica  $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$  (con  $\omega^2 = K/m$ , se  $K$  è la costante elastica e  $m$  indica la massa): le soluzioni  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$  hanno periodo  $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/K}$ , o  $T = 1/\nu$ , con

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}.$$

Utilizzando questa definizione di  $\nu$  anche per il caso dell'oscillatore armonico quantistico, la formula precedente assume la forma

$$E = E_n = h\nu \left( n + \frac{1}{2} \right),$$

che esprime la ben nota *quantizzazione dell'energia*: i valori ammissibili dell'energia formano un insieme discreto.

## 6.5 MODI NORMALI DI VIBRAZIONE PER UNA MEMBRANA CIRCOLARE

Consideriamo il problema delle vibrazioni trasversali di una membrana fissata al bordo della regione circolare  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ . Una possibile modellizzazione è tradotta dal problema

La funzione  $v(x) = e^{-x^2/2}$  è una soluzione approssimata di tale equazione, nel senso che

$$v''(x) = (-1 + x^2)e^{-x^2/2} \sim x^2 e^{-x^2/2} = x^2 v(x) \quad \text{per } |x| \text{ grande.}$$

È quindi ragionevole cercare soluzioni esatte della (6.11) nella forma  $u(x)e^{-x^2/2}$  (si pensi al metodo di variazione delle costanti...). Nel ragionamento svolto è anche possibile considerare, in luogo di  $e^{-x^2/2}$ , la funzione  $e^{x^2/2}$ , ma questa non soddisfa la condizione di annullamento all'infinito.

differenziale

$$\begin{cases} u_{tt}(x, y; t) = c^2 \Delta_{x,y} u(x, y; t) & \text{in } D \\ u(x, y; t) = 0 & \text{per } (x, y) \in \partial D \\ u(\cdot; 0) = u_0 \\ u_t(\cdot; 0) = u_1, \end{cases} \quad (6.13)$$

dove  $u(x, y; t)$  rappresenta lo scostamento verticale dalla posizione di riposo nel punto  $(x, y)$  all'istante  $t$  di tempo,  $c > 0$  è la velocità di propagazione delle onde elastiche nel mezzo,  $u_0$  indica il profilo iniziale della membrana e  $u_1$  la velocità iniziale in ogni punto.

Cerchiamo innanzitutto soluzioni 'elementari' che soddisfino la condizione di annullamento al bordo di  $D$ .

a) Come primo passo determiniamo soluzioni che presentino la variabile temporale  $t$  separata dalle variabili spaziali  $x, y$ , nella seguente forma:

$$u(x, y; t) = T(t)v(x, y).$$

Deve allora essere

$$T''(t)v(x, y) = c^2 T(t) \Delta v(x, y),$$

e quindi

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{\Delta v(x, y)}{v(x, y)}.$$

Entrambi i membri devono essere costanti, diciamo  $-\lambda$ , quindi

$$T'' + c^2 \lambda T = 0 \quad (6.14)$$

$$-\Delta v = \lambda v. \quad (6.15)$$

La seconda equazione, con la condizione che  $u$  sia costantemente nulla sul bordo di  $D$ , dà:

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} -\Delta v = \lambda v & \text{in } D \\ v = 0 & \text{su } \partial D. \end{cases}$$

I valori  $\lambda$  per i quali il problema  $(P_\lambda)$  ha soluzioni non nulle sono detti *autovalori* di  $-\Delta$  (sul dominio  $D$ ); le corrispondenti soluzioni sono dette *autofunzioni*.

PROPOSIZIONE 6.5.1 *Gli autovalori di  $-\Delta$  su  $D$  sono strettamente positivi.*

*Dimostrazione.* Sia  $\lambda$  un autovalore di  $(P_\lambda)$  e  $v$  un'autofunzione corrispondente. Utilizzando la formula di integrazione per parti in più variabili e tenendo conto che  $v = 0$  su  $\partial D$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} \int \int_D \nabla v \nabla v \, dx dy &= - \int \int_D v \Delta v \, dx dy + \int_{\partial D} v \frac{\partial v}{\partial \nu} \, d\sigma \\ &= \lambda \int \int_D v^2 \, dx dy. \end{aligned}$$

Ne segue che  $\lambda$  deve essere positivo, strettamente poiché  $v$  non è identicamente nulla.  $\square$

b) Per individuare gli autovalori del problema  $(P_\lambda)$  sfruttiamo la forma del dominio  $D$ , scrivendo il problema in coordinate polari  $(\varrho, \vartheta)$ . Indichiamo per semplicità con  $v(\varrho, \vartheta)$  la funzione  $v(\varrho \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta)$  e ricordiamo l'espressione del laplaciano in coordinate polari; abbiamo quindi

$$\begin{cases} -(v_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho} v_{\varrho} + \frac{1}{\varrho^2} v_{\vartheta\vartheta}) = \lambda v & 0 < \varrho < 1, \vartheta \in \mathbb{R} \\ v(1, \vartheta) = 0 \end{cases} \quad (6.16)$$



con l'ulteriore condizione che  $v$  sia  $2\pi$ -periodica in  $\vartheta$  e che

$$\text{esista finito } \lim_{\varrho \rightarrow 0} v(\varrho, \vartheta).$$

Osserviamo che se i dati iniziali  $u_0$  e  $u_1$  sono indipendenti da  $\vartheta$ , la simmetria del problema suggerisce che anche la soluzione  $u$  goda della medesima proprietà. Consideriamo quindi innanzitutto la situazione  $v = v(\varrho)$ ; in tal caso le condizioni su  $v$  sono:

$$\begin{cases} v'' + \frac{1}{\varrho}v' + \lambda v = 0, & 0 < \varrho < 1, \\ v(1) = 0, & \text{esista finito } \lim_{\varrho \rightarrow 0} v(\varrho). \end{cases}$$

Assumiamo  $\lambda > 0$  in base alla Proposizione 6.5.1. Se eseguiamo il cambiamento di variabile

$$r = \sqrt{\lambda}\varrho, \quad w(r) = v(r/\sqrt{\lambda})$$

l'equazione diventa:

$$w'' + \frac{1}{r}w' + w = 0,$$

che è l'equazione di Bessel di ordine 0 introdotta nel paragrafo precedente.

Le soluzioni si esprimono dunque nella forma

$$w(r) = c_1 J_0(r) + c_2 Y_0(r),$$

cioè

$$v(\varrho) = c_1 J_0(\sqrt{\lambda}\varrho) + c_2 Y_0(\sqrt{\lambda}\varrho).$$

La condizione di regolarità in  $\varrho = 0$  dà  $c_2 = 0$  (ricordiamo che  $Y_0$  è singolare in 0); del resto, la richiesta  $v(1) = 0$  dà

$$J_0(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Come il comportamento qualitativo di  $J_0$  in Figura 6.1 lascia intuire, esiste una successione di zeri di  $J_0$ , quindi una successione di soluzioni  $\lambda_n$  per l'equazione  $J_0(\sqrt{\lambda}) = 0$ . In corrispondenza a questi la (6.14) diventa:

$$T'' + c^2 \lambda_n T = 0,$$

da cui

$$T(t) = A \cos(c\sqrt{\lambda_n}t - \varphi),$$

al variare di  $A \geq 0$  e  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

Concludiamo che le funzioni

$$u_n(\varrho, t) = J_0(\sqrt{\lambda_n}\varrho) \cos(c\sqrt{\lambda_n}t - \varphi_n),$$

con  $\lambda_n$  determinati come detto e  $\varphi_n$  arbitrari valori reali, risolvono

$$\begin{cases} u_{tt}(x, y; t) = c^2 \Delta_{x,y} u(x, y; t) & \text{in } D \\ u(x, y; t) = 0 & \text{per } (x, y) \in \partial D. \end{cases}$$

**OSSERVAZIONE 6.5.2** Si parla di *modi normali di vibrazione* in relazione alle soluzioni  $u_n$  così ottenute. Per ciascuno di essi l'ampiezza delle oscillazioni in ogni punto  $(\varrho, \vartheta)$  è dato dal valore di  $J_0$  in  $\sqrt{\lambda_n}\varrho$ ; pertanto sono presenti "linee nodali" concentriche lungo le quali lo spostamento rimane nullo: si tratta delle circonferenze di raggi  $\varrho = \sqrt{\lambda_k}/\sqrt{\lambda_n}$  per  $k < n$ . (Si veda, ad esempio, [4]).

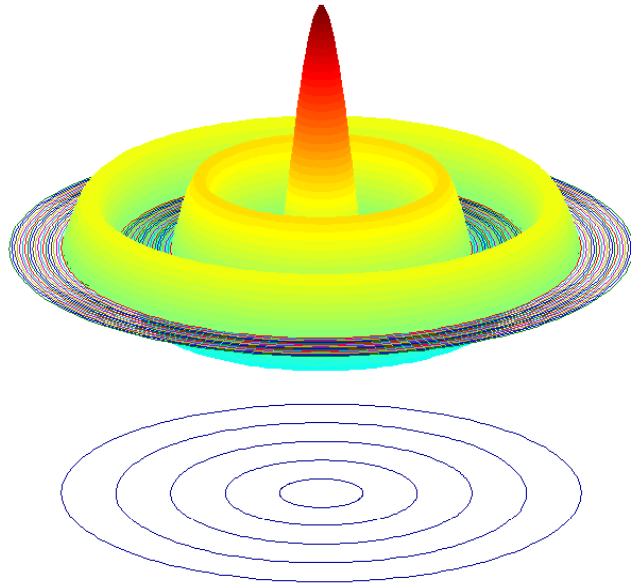


Figura 6.3 - Linee nodali nei modi normali di vibrazione di una membrana circolare.

Secondo lo stesso schema seguito per l'equazione di Laplace su un rettangolo, per risolvere il problema (6.13) si considera una serie delle funzioni elementari  $u_n$ :

$$u(\varrho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(\varrho, t).$$

I coefficienti  $c_n$  e  $\varphi_n$  vengono poi determinati mediante le condizioni iniziali. Al riguardo conviene scrivere le  $c_n u_n$  nella forma

$$u_n(\varrho, t) = J_0(\sqrt{\lambda_n} \varrho) [a_n \cos(c\sqrt{\lambda_n} t) + b_n \sin(c\sqrt{\lambda_n} t)],$$

e utilizzare l'arbitrarietà di  $a_n$  e  $b_n$  (anzichè di  $c_n$  e  $\varphi_n$ ). Allora la condizione  $u(\cdot, 0) = u_0$  diventa:

$$u_0(\varrho) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\sqrt{\lambda_n} \varrho)$$

mentre la condizione  $u_t(\cdot, 0) = u_1$  dà luogo a:

$$u_1(\varrho) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n c \sqrt{\lambda_n} J_0(\sqrt{\lambda_n} \varrho).$$

Si tratta di uno *sviluppo di Bessel-Fourier* dei dati iniziali.

## Bibliografia

1. E. Acerbi, L. Modica, and S. Spagnolo. *Problemi scelti di Analisi Matematica II*. Liguori, Napoli, 1986.
2. H. Amann. *Ordinary differential equations. An introduction to nonlinear analysis*, volume 13 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1990.
3. V. I. Arnold. *Ordinary differential equations*. Universitext. Springer-Verlag, 2006. Translated from the Russian by Roger Cooke. Second printing of the 1992 edition.
4. F. Bowman. *Introduction to Bessel functions*. Dover Publications Inc., New York, 1958.
5. Martin Braun. *Differential equations and their applications. An introduction to applied mathematics.*, volume 11 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1993.
6. Lamberto Cesari. *Optimization—theory and applications*, volume 17 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 1983. Problems with ordinary differential equations.
7. P. Ciarlet. *Mathematical Elasticity*. North Holland, Amsterdam, 1988.
8. Jack K. Hale. *Ordinary differential equations*. Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, N.Y., second edition, 1980.
9. Jack K. Hale and Hüseyin Koçak. *Dynamics and bifurcations*, volume 3 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.
10. Philip Hartman. *Ordinary differential equations*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1964.
11. Morris W. Hirsch and Stephen Smale. *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra.*, volume 60 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1974.
12. Morris W. Hirsch, Stephen Smale, and Robert L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos.*, volume 60 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2004.
13. Livio C. Piccinini, Guido Stampacchia, and Giovanni Vidossich. *Equazioni differenziali ordinarie in  $\mathbb{R}^n$  : (problemi e metodi)*. Serie di matematica e fisica; 5. Liguori, Napoli, 1978.

14. C. Renfrew. Il carbonio-14 e la preistoria d'europa. *Le Scienze*, gennaio, 1972.
15. S. Salsa and A. Squellati. *Esercizi di analisi matematica 2*. Masson, 1994.
16. George F. Simmons. *Differential equations with applications and historical notes*. International Series in Pure and Applied Mathematic. McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg, 1972.
17. H.F. Weinberger. *A first course in Partial Differential Equations*. Blaisdell Publishing Company, 1965.
18. H. K. Wilson. *Ordinary differential equations. Introductory and intermediate courses using matrix methods*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1971.

# Indice analitico

- $\alpha$ -limite, 136
- $\omega$ -limite, 136
- autofunzioni, 139, 146
- autospazi generalizzati, 114, 115
- autovalori
  - di  $d^2/dx^2$ , 139
  - di  $-\Delta$  su un cerchio, 146
- bacino di attrazione, 135
- brachistocrona, 55
- centro, 109
- cicloide, 57
- cinetica chimica, 4
- circuiti elettrici, 8
  - circuiti *RC*, 9
  - circuiti *RL*, 9
  - circuiti *RLC*, 10
  - circuiti accoppiati, 10
- confronto (teorema del), 36
- decadimento radioattivo, 6
- differenziale, 68
- dependenza continua dai dati, 39, 43
- disuguaglianze differenziali, 36
- equazione
  - di Bessel, 142
  - di Laplace, 138
  - della crescita malthusiana, 2
  - delle elastiche piane, 17
  - di Hermite, 15, 140
  - di Schrödinger, 14
  - logistica, 3
- equazione caratteristica, 102
- equazione di Eulero di un funzionale, 65, 67
- equazioni
  - a fattore integrante, 63
  - a variabili separabili, 49
  - del tipo  $F(y, y') = 0$  o  $F(x, y') = 0$ , 54
  - di Bernoulli, 52
  - di Clairaut, 58
  - di Riccati, 52
  - di tipo omogeneo, 53
  - di tipo omogeneo generalizzato, 53
  - e forme differenziali, 60
  - e forme differenziali, 59
  - lineari, 73
    - scalari del primo ordine, 34, 50
    - scalari di ordine superiore, 99
  - Lotka-Volterra, 12, 20
  - preda-predatore, 11
- equazioni in forma normale, 18
- esistenza e unicità (teorema di), 25
- esistenza globale, 32, 37, 38
- esponenziale di una matrice, 79, 82, 84
- estremale di un funzionale integrale, 67
- fattore integrante, 63
- flusso, 44
  - isocrona equivalenza, 129
  - iperbolico, 123
  - lineare, 121
- forma canonica
  - di Jordan, 116

- reale, 118
- forme differenziali, 70
  - cambiamento di variabile, 65
  - esatte, chiuse, 70
  - pull-back, 70
- funzioni di Bessel, 142, 144
- fuoco, 109
  
- Grobman-Hartman, teorema di, 129
- Gronwall (lemma di), 33
  
- integrale generale, 19
- integrale primo, 67, 134
- invariante, 136
  
- Liapunov, funzione di, 133
- Liouville, teorema di, 76, 100
- lipschitzianità, 24
- Lotka-Volterra, 37, 60, 63
  
- Malthus, Thomas Robert, 2
- massimale, intervallo, 29
- modelli di crescita
  - per una singola popolazione, 1
  - specie in competizione, 11
- modi normali di vibrazione, 147
  
- nilpotente, matrice, 84
- nodo, 106
- nucleo risolvente, 101
  
- operatori lineari, rappresentazione, 111
- orbita, 45, 136
  - caso bidimensionale, 59
  - riparametr. delle soluzioni, 46
- oscillatore armonico, 7
  - quantistico, 144
  
- Peano (teorema di), 27
- pendolo semplice, 129, 135
  - libero, 12
  - piccole oscillazioni, 13
  - smorzato, 129
- polinomi di Hermite, 145
- pozzo, 122
- problema ai limiti, 17, 139
- problema ai valori iniziali, 2, 8, 18, 23
- problema di Cauchy, 23
- prolungamento delle soluzioni, 29
- punto di equilibrio, 121
  
- radiocarbonio, datazione, 6
- risolvente, matrice, 76
  
- separazione di variabili, 14, 138
- sink, 122
- sistemi autonomi, 20, 44
- sistemi dinamici, 44, 121, 135
- sistemi gradiente, 135
- sistemi hamiltoniani (stabilità), 134
- sistemi lineari, 73
- sistemi lineari bidimensionali, 105
  
- sorgente, 122
- spazio degli stati, spazio delle fasi, 20, 45
- spazio tangente, 69
- stabilità, 43, 122
  - per linearizzazione, 128
- sviluppo in serie
  - di Bessel-Fourier, 148
  - di Fourier, 140
  
- tasso di variazione, 1
  
- unicità, 25, 27, 35
  - esempio di non unicità, 28
  
- valore regolare, 61
- variazione ammissibile, 65
- variazione delle costanti, 78
  - per eq. lineari del I ordine, 51
- variazione prima di un funzionale, 65
- varietà instabile, 124
- varietà stabile, 124
- Verhulst, Pierre François, 3
  
- wronskiana, matrice, 75, 100