

ANALISI MATEMATICA 3

Prova scritta del 30 gennaio 2018

Esercizio 1. (a) Determinare un'opportuna espressione che descriva l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 2ty' - 2y = 0$$

(può essere utile la sostituzione $y(t) = v(t^2)$).

(b) Detta $y_\kappa(t)$ la soluzione del problema di Cauchy ottenuto associando alla precedente equazione le condizioni iniziali $y(0) = \kappa$, $y'(0) = 1$, discutere, al variare di $\kappa \in \mathbb{R}$, il limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_\kappa(t).$$

Esercizio 2. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2, \\ y' = y^2 - 1. \end{cases}$$

(a) Discutere la stabilità dei punti stazionari.

(b) Dimostrare che il sistema ammette infinite orbite eterocline (ovvero tali che $\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = P_1$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = P_2$, ove P_1 e P_2 sono punti stazionari distinti).

Esercizio 3. Calcolare l'integrale

$$\int_C \frac{z^2}{3 - 4 \cos 2z + \cos 4z} dz,$$

ove C rappresenta il bordo del quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$ percorso una volta in senso antiorario.

Esercizio 4. Calcolare, utilizzando metodi di variabile complessa,

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1}{\sin t} dt.$$