

ANALISI MATEMATICA 3

Prova scritta del 26 giugno 2018

Esercizio 1. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{-y}{1-x^2-y^2}, \\ y'(t) = \frac{x}{1-x^2-y^2}. \end{cases}$$

Studiare il comportamento qualitativo delle soluzioni determinando in particolare i punti di equilibrio e la loro stabilità.

Esercizio 2. Si consideri il problema di Cauchy in avanti

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = b(t), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \\ x'(0) = x_1, \end{cases}$$

ove $b \in C^1([0, +\infty))$, e si determini una formula risolutiva esplicita dipendente dai dati iniziali x_0, x_1 e dalla forzante b . Si dimostri inoltre che se b è monotona (per esempio non crescente) e limitata, allora anche la soluzione x è limitata. Infine, si mostri tramite un controesempio che se b è limitata, ma non monotona, allora x può non essere limitata.

Esercizio 3. (a) Sia fissato $w \in \mathbb{C}$. Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{1}{\sin z \cos(wz) - z}.$$

Determinare, al variare di $w \in \mathbb{C}$, l'ordine del polo $z = 0$.

(b) Si consideri il caso $w = 1$ e si prenda dunque

$$f(z) = \frac{1}{\sin z \cos z - z}.$$

Determinare i coefficienti c_{-n} , $n \geq 1$ (e in particolare il residuo c_{-1}), dello sviluppo di Laurent di f in 0 (si consiglia di determinare i coefficienti in modo ricorsivo partendo da quello di ordine più alto).

Esercizio 4. Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + (1-2i)x^2 - 2i}.$$