ANALISI MATEMATICA 3

Prova scritta del 26 febbraio 2018

Esercizio 1. (a) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) + (z + z^2)\sin t = 0, \\ z(0) = -1/2. \end{cases}$$

(b) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) + (x + 2xy)\sin t = 0, \\ y'(t) + (y + x^2 + y^2)\sin t = 0, \\ x(0) = 1/4, \\ y(0) = -3/4. \end{cases}$$

Esercizio 2. (a) Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$. Studiare qualitativamente le soluzioni dell'equazione

$$y' = 2|y - f(t)|^{1/2} + f'(t),$$

inquadrando i risultati trovati alla luce della teoria.
(b) Sia ora $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Studiare qualitativamente le soluzioni dell'equazione

$$y' = \left|f^2(t) - y^2\right|^{1/2} + \frac{f'(t)}{f(t)}y$$

(ci si può eventualmente limitare a considerare le soluzioni che verificano $|y(t)| \leq f(t)$).

Esercizio 3. Calcolare l'integrale

$$\int_C \frac{\pi}{\pi z - 1} \cos\left(\frac{1}{2z}\right) \mathrm{d}z,$$

ove C è la circonferenza di centro 0 e raggio $1/4$ percorsa una volta in senso antiorario.

Esercizio 4. Sia $f \in \mathcal{H}(B(0,1) \setminus \{0\})$ e si supponga che 0 sia un polo per f (di ordine qualunque). Determinare una formula che descriva il

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{C_r^+} z^3 f(z^2)\, \mathrm{d}z$$

in termini dei coefficienti c_n, $n \in \mathbb{Z}$, dello sviluppo di Laurent di f nell'intorno di 0. Come di consueto C_r^+ rappresenta la semicirconferenza di centro 0 e raggio $r \in (0,1)$ avente sostegno nel semispazio $\{z = a + ib : b \geq 0\}$, percorsa in senso antiorario.